

ARCHIV FÜR ELEKTROTECHNIK

IM EINVERNEHMEN MIT DEM VERBAND DEUTSCHER ELEKTROTECHNIKER e. V. (VDE)

HERAUSGEGEBEN VON

J. FISCHER UND W. NÜRNBERG

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

45. BAND

1960

ERSTES HEFT

Inhaltsverzeichnis

	Seite
E. FLEGLER: Die magnetischen CGS-Einheiten und das Internationale Einheitensystem	1
J. FISCHER: Die Einheiten Maxwell, Gauß, Oersted	4
F. OLLENDORFF: Beitrag zur Kenntnis der Ionenbewegung in Halbleitern. Mit 7 Textabbildungen . . .	10
H. BUCHHOLZ: Elektromagnetische Felder mit axialer Symmetrie bei Begrenzungen durch Kegel und Kugel. Mit 6 Textabbildungen	27
J. HAK: Der Wärmewiderstand zwischen Zahn und Joch. Mit 8 Textabbildungen	49
A. KESSLER: Versuch einer genaueren Vorausberechnung des zeitlichen Erwärmungsverlaufs elektrischer Maschinen mittels Wärmequellennetzen. Mit 9 Textabbildungen	59

Schütze und Schützensteuerungen

Von HERBERT FRANKEN, Direktor der Firma Klöckner-Moeller GmbH., Bonn/Rh.

Mit 241 Abbildungen. VII, 382 Seiten Gr.-8°. 1959.

Ganzleinen DM 42,—

INHALTSÜBERSICHT

Einleitung, Begriffe und Gliederungen · Die Schütze · Befehlsgeräte · Steuerzwischengeräte · Meldegeräte · Die Schaltpläne bei Schützensteuerungen · Das elektrische Steuersystem — Der Steuerkreis · Schützenkombinationen · Die Abdeckung (Kapselung) von Geräten · Die Lebensdauer der Schaltgeräte · Die Auswahl der Geräte · Die Prüfung · Beispiele · Schrifttum · Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Das

Archiv für Elektrotechnik

erscheint nach Maßgabe der eingehenden Arbeiten zwanglos in einzeln berechneten Heften.

Nachdruck: Mit der Annahme des Manuskripts eines Beitrages für die Zeitschrift „Archiv für Elektrotechnik“ erwirbt der Springer-Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder, einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung. — Im „Archiv für Elektrotechnik“ erscheinende Arbeiten dürfen vorher nicht an anderer Stelle veröffentlicht worden sein und auch später nicht anderweitig, weder im Inland noch im Ausland, veröffentlicht werden. Ausnahmen von dieser Regel bedürfen einer entsprechenden Vereinbarung zwischen Autor, Herausgeber und Verlag.

Fotokopien: Aufgrund des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens ist jedoch die Anfertigung fotomechanischer Kopien eines Beitrages gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch gestattet, sofern der Hersteller oder Benutzer jede Seite dieser Kopie mit einer Gebühren-Wertmarke im Betrag von DM 0,30 kenntlich macht. (Diese Marken sind zu beziehen vom Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. (Inkasso-Stelle) Frankfurt/M., Großer Hirschgraben 17/19. *Der Verlag läßt diese Beiträge den Autorenverbänden zufließen.* Die Verpflichtung zur Verwendung von Gebühren-Wertmarken entfällt, falls der Hersteller von Kopien mit dem Springer-Verlag ein Pauschalabkommen über die Kopie-Gebühren-Entrichtung vereinbart hat.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürfen.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch und wissenschaftlicher Veröffentlichungen“ hingewiesen (Geschäftsstelle Berlin W 15, Uhlandstr. 175), ebenso auf die Normblätter DIN 1304, Allgemeine Formelzeichen, und DIN 1302, Mathematische Zeichen. Es wird gebeten, an den Anfang jeder Abhandlung eine Übersicht zu stellen, am Ende eine Zusammenfassung zu geben. Die Übersicht soll den eiligen Leser über die Einteilung (den Gedankengang), die Zusammenfassung über die wesentlichen Ergebnisse der Arbeit unterrichten. Am Schluß jedes Manuskriptes ist die vollständige Anschrift des Verfassers anzugeben. Im Manuskript sind griechische Buchstaben rot, Frakturbuchstaben blau, geradstehende Buchstaben gelb zu unterstreichen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung, notfalls auch die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Von jeder Arbeit werden zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich geliefert.

Manuskripte sind zu senden:

Für die Gebiete: Grundlagen, Theorie, Meßtechnik, Schwachstromtechnik usw. an: Prof. Dr.-Ing. JOHANNES FISCHER, (17a) Karlsruhe i. Baden, Schirmerstraße 6.

Für die Gebiete: Starkstromtechnik, Energieübertragung, Hochspannungstechnik usw. an: Prof. Dr.-Ing. WERNER NÜRNBERG, (1) Berlin-Charlottenburg 2, Technische Universität.

Manuskripte, die bei dem unterzeichneten Verlag in Berlin oder Heidelberg eingehen, wird dieser sofort dem zuständigen Herausgeber übermitteln.

SPRINGER-VERLAG

Berlin-Wilmersdorf

Heidelberg

Heidelberger Platz 3, Fernspr.: Sammel-Nr. 830301.

Neuenheimer Landstraße 28—30, Fernspr. 27901

ALBERT PALM

Registrierinstrumente

Zweite, neubearbeitete Auflage von Dr. phil. nat. H. ROTH, Frankfurt/Main, und Dr. rer. nat. E.-G. SCHLOSSER, Frankfurt/Main-Höchst

Mit 206 Abbildungen. VIII, 255 Seiten Gr.-8°. 1959.

Ganzleinen DM 27,—

INHALTSÜBERSICHT

Einleitung: Über die Bedeutung des Registrierens in Wissenschaft und Technik. Stoffeinteilung · Die Registriermittel · Triebwerke · Meßwertübertragung im Registrierinstrument · Beschreibung der Instrumente · Anwendung von Registrierinstrumenten · Literaturverzeichnis · Firmenverzeichnis · Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

ARCHIV FÜR ELEKTROTECHNIK

IM EINVERNEHMEN MIT DEM VERBAND DEUTSCHER ELEKTROTECHNIKER e. V. (VDE)

HERAUSGEGEBEN VON

J. FISCHER UND W. NÜRNBERG

XLV. BAND

MIT ZAHLREICHEN ABBILDUNGEN



SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

1960

Alle Rechte, einschließlich das der Übersetzung in fremde Sprachen und das der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung vorbehalten. Aufgrund des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens ist jedoch die Anfertigung fotomechanischer Kopien eines Beitrages gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch gestattet, sofern der Hersteller oder Benutzer jede Seite dieser Kopie mit einer Gebühren-Wertmarke im Betrag von DM 0,30 kenntlich macht. Diese Marken sind zu beziehen vom Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. (Inkasso-Stelle) Frankfurt/M., Großer Hirschgraben 17/19. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.* Die Verpflichtung zur Verwendung von Gebühren-Wertmarken entfällt, falls der Hersteller von Kopien mit dem Springer-Verlag ein Pauschalabkommen über die Kopie-Gebühren-Entrichtung vereinbart hat.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürfen.

Springer-Verlag OHG / Berlin • Göttingen • Heidelberg.
Printed in Germany.

Namenverzeichnis

	Seite		Seite
BÖNING, W., Analytische Darstellung der Kennlinien nichtlinearer Zweipole	265	HERMSTEIN, W., Die Stromfaden-Entladung und ihr Übergang in das Glimmen	209
—, Theorie des stromsteuernden Transduktors für den eingeschwungenen Zustand	317	—, Die Entwicklung der positiven Vorentladungen in Luft zum Durchschlag	279
BUCHHOLZ, H., Elektromagnetische Felder mit axialer Symmetrie bei Begrenzungen durch Kegel und Kugel	27	HESSE, D., Über den Einfluß des Laufschienefeldes auf die Ausbildung und Bewegung von Lichtbogenfußpunkten	188
—, Die innere Impedanz eines Induktionsofens bei Hochfrequenz	162	—, Zur Bestimmung des Laufschienefeldes am wandernden Lichtbogen	466
—, Die H_{0n} -Wellen im kreisförmigen Hohlleiter mit äquidistant und koaxial angeordneten bandförmigen Ringen vollkommener Leitfähigkeit	249	KESSLER, A., Versuch einer genaueren Vorausberechnung des zeitlichen Erwärmungsverlaufs elektrischer Maschinen mittels Wärmequellennetzen	59
—, Der Erwärmungsvorgang in kreisförmigen dielektrischen Scheiben im Hochfrequenzfeld von Hohlleitern mit H_{0r} -Wellen	447	KOVACS, K. P., Symmetrische Komponenten der Momentanwerte, oder Vektoren der elektrischen Größen?	99
EDELMANN, H., Die Inzidenzmatrizen der Schnittmengen eines Netzes	347	NAHRGANG, S., Elektromagnetisch-mechanische Energiewandler	233
—, Transformatoren und andere Vierpole in der Netzberechnung mit Inzidenzmatrizen	479	NEES, G., Zur digitalen Berechnung der transformierten Matrizen von Vierpolnetzen	329
EFFERTZ, F. H., u. W. MEUFFELS, Über Realisierbarkeitsbedingungen für die Impedanzfunktionen zweipoliger elektrischer Netzwerke unter Berücksichtigung der Verluste von Spulen und Kondensatoren	418	OLLENDORFF, F., Beitrag zur Kenntnis der Ionenbewegung in Halbleitern	10
FISCHER, J., Die Einheiten Maxwell, Gauß, Oersted	4	—, Elektrodynamik der Bildkraft	169
—, Über die Anzahl der von einander unabhängigen Größen in der Elektrizitätslehre	77	SCHUISKY, W., Kurzschlußdrehmomente bei der Synchronmaschine	301
—, Magnetisches Moment und magnetische Ladung	157	SCHWARTZ, E., Einige Geräte zur Konstruktion von Ortskurven	368
—, Dreiersysteme, Vierersysteme, Fünfersysteme und Größenlehre	225	STIER, F., Bestimmung der Energie eines ebenen Magnetfeldes durch Abbildung desselben auf ein elektrisches Stromfeld	343
FLEGLER, E., Die magnetischen CGS-Einheiten und das Internationale Einheitensystem	1	TUMA, M., Beitrag zur Theorie der Kapazitätssonde	289
HAK, J., Der Wärmewiderstand zwischen Zahn und Joch	49	UNGRUH, F., Die Stabilität elektrischer Ausgleichswellen bei Speisung mit Drehstrom, Wechselstrom und Gleichstrom	373
—, Zwei Ergänzungen zur Wärmequellen-Netzmethode	407	VOLKMANN, W., Die Berechnung einphasiger Boucherot-Schaltungen mit Gleichrichterbelastung	399
HANNAKAM, L., Entwicklung geschlossener Näherungsbeziehungen für unsymmetrische Stoßkurzschlüsse der synchronen Schenkelpolmaschine	118	WEH, H., Stationäre Erwärmung indirekt axial gekühlter elektrischer Maschinen	429
		WOLLENEK, A., Kontakterosion und Grenzstromwerte ruhender Starkstromkontakte	357

Sachverzeichnis

Das Sachverzeichnis ist nach der Internationalen Dezimalklassifikation gegliedert. Die den Gebieten vorangestellten Zahlen sind die Kennzahlen dieser Klassifikation. Maßgebend für die Reihenfolge der Gebiete ist die erste Ziffer der Kennzahlen, für weitergehende Gliederung die zweite Ziffer usw.

	Seite
536 Physik—Wärmelehre	
BUCHHOLZ, H., Der Erwärmungsvorgang in kreisförmigen dielektrischen Scheiben im Hochfrequenzfeld von Hohlleitern mit $H_{0\pi}$ -Wellen	447
537.1 Theorie der Elektrizität	
BUCHHOLZ, H., Elektromagnetische Felder mit axialer Symmetrie bei Begrenzungen durch Kegel und Kugel	27
—, Die innere Impedanz eines Induktionsofens bei Hochfrequenz	162
FISCHER, J., Magnetisches Moment und magnetische Ladung	157
—, Über die Anzahl der von einander unabhängigen Größen in der Elektrizitätslehre	77
—, Dreiersysteme, Vierersysteme, Fünfersysteme und Größenlehre	225
OLLENDORF, F., Elektrodynamik der Bildkraft	169
STIER, F., Bestimmung der Energie eines ebenen Magnetfeldes durch Abbildung desselben auf ein elektrisches Stromfeld	343
537.52 Elektrische Entladungen. Stoßfestigkeit. Funken	
HERMSTEIN, W., Die Stromfaden-Entladung und ihr Übergang in das Glimmen	209
—, Die Entwicklung der positiven Vorentladungen in Luft zum Durchschlag	279
621.3.01 Elektrotechnik — Allgemeine Arbeiten. Begriffsbestimmungen. Benennung	
NAHRGANG, S., Elektromagnetisch-mechanische Energiewandler	233
KOVACS, K. P., Symmetrische Komponenten der Momentanwerte, oder Vektoren der elektrischen Größen?	99
SCHWARTZ, E., Einige Geräte zur Konstruktion von Ortskurven	368
VOLKMANN, W., Die Berechnung einphasiger Boucherot-Schaltungen mit Gleichrichterbelastung	399
621.3.081 Einheiten. Konstanten. Stoffwerte	
FISCHER, J., Die Einheiten Maxwell, Gauß, Oersted	4
FLEGLER, E., Die magnetischen CGS-Einheiten und das Internationale Einheitensystem	1
621.313 Elektrotechnik — Elektrische Maschinen	
HAK, J., Der Wärmewiderstand zwischen Zahn und Joch	49
—, Zwei Ergänzungen zur Wärmequellen-Netz-methode	407
HANNAKAM, L., Entwicklung geschlossener Näherungsbeziehungen für unsymmetrische Stoßkurzschlüsse der synchronen Schenkel-polmaschinen	118

	Seite
KESSLER, A., Versuch einer genaueren Voraus-berechnung des zeitlichen Erwärmungsver-laufs elektrischer Maschinen mittels Wärme-quellennetzen	59
SCHUISKY, W., Kurzschlußdrehmomente bei der Synchronmaschine	301
UNGRUH, F., Die Stabilität elektrischer Aus-gleichswellen bei Speisung mit Drehstrom, Wechselstrom und Gleichstrom	373
WEH, H., Stationäre Erwärmung indirekt axial gekühlter elektrischer Maschinen	429
621.315.592 Halbleiter	
OLLENDORF, F., Beitrag zur Kenntnis der Ionen-bewegung in Halbleitern	10
621.326.5 Öffnen und Schließen von Stromkreisen. Kontakte	
HESSE, D., Über den Einfluß des Laufschiene-nfeldes auf die Ausbildung und Bewegung von Lichtbogenfußpunkten	188
—, Zur Bestimmung des Laufschiene-nfeldes am wandernden Lichtbogen	466
WOLLENEK, A., Kontakterosion und Grenzstrom-werte ruhender Starkstromkontakte	357
621.317 Elektrische Meßtechnik	
TUMA, M., Beitrag zur Theorie der Kapazitäts-sonde	289
621.372.4 Zweipole	
BÖNING, W., Analytische Darstellung der Kenn-linien nichtlinearer Zweipole	265
EFFERTZ, F. H., u. W. MEUFFELS, Über Realisier-barkeitsbedingungen für die Impedanzfunk-tionen zweipoliger elektrischer Netzwerke unter Berücksichtigung der Verluste von Spulen und Kondensatoren	418
621.372.5 Vierpole	
EDELMANN, H., Transformatoren und andere Vierpole in der Netzberechnung mit Inzidenz-matrizen	479
NEES, G., Zur digitalen Berechnung der transfor-mierten Matrizen von Vierpolnetzen	329
EDELMANN, H., Die Inzidenzmatrizen der Schnittmengen eines Netzes	347
621.372.8 Wellenleiter	
BUCHHOLZ, H., Die $H_{0\pi}$ -Welle im kreisförmigen Hohlleiter mit äquidistant und coaxial ange-ordneten bandförmigen Ringen vollkommener Leitfähigkeit	249
621.375.3 Magnetische Verstärker	
BÖNING, W., Theorie des stromsteuernden Trans-dukts für den eingeschwungenen Zustand	317

Die magnetischen CGS-Einheiten und das Internationale Einheitensystem

Von

EUGEN FLEGLER, Aachen

(Eingegangen am 12. Dezember 1959)

Inhaltsübersicht: Die Einheiten der Dreier-Systeme. — Der Übergang zum Vierer-System. — Die Einheit Maxwell und das Internationale Einheitensystem. — Die Einheiten Gauß und Oersted. — Weitere Entwicklung. — Literatur.

Von den Einheiten der CGS-Systeme haben die elektromagnetischen Einheiten eine besondere Bedeutung gewonnen, einmal, weil die Einheiten der magnetischen Größen heute noch häufig verwendet werden (wie z. B. die Einheiten Maxwell, Gauß und Oersted), und zum anderen, weil die elektrischen Einheiten des internationalen Einheitensystems (wie z. B. Volt, Ampere usw.) ihr Dasein dem elektromagnetischen CGS-System verdanken. Viele Jahrzehnte sind die genannten Einheiten wie Maxwell, Gauß, Oersted, Volt und Ampere in Gleichungen nebeneinander benutzt und durch Gleichheitszeichen miteinander verbunden worden. Erst neuerdings werden Bedenken gegen derartige Gleichsetzungen laut und es wird die Forderung erhoben, in Beziehungen zwischen den Einheiten Maxwell, Gauß und Oersted einerseits und den Einheiten Volt und Ampere andererseits nur das Entsprichtzeichen zu verwenden [1]. Wäre diese Forderung berechtigt und ihre Erfüllung unausweichlich, so könnten z. B. die Einheiten Gauß und Volt nicht mehr gleichzeitig in dieselbe Gleichung eingesetzt werden, sondern sie dürften nur in einer Entsprichtbeziehung verwendet werden. Es ist zu bezweifeln, ob der praktisch rechnende Ingenieur mit derartigen Entspricht-Beziehungen, etwa bei der Berechnung elektrischer Maschinen und Transformatoren, etwas anfangen kann.

Die Einheiten der Dreier-Systeme

Wir betrachten die Beziehungen zwischen den Einheiten der elektrischen Spannung und des magnetischen Flusses im elektromagnetischen CGS-System. Dieses System beruht auf drei mechanischen Grundeinheiten (cm, g, s) und gehört damit auch zu einem auf drei mechanischen Grundgrößen (Länge, Masse, Zeit) beruhenden Dreier-Größensystem. Entsprechend der physikalischen Gleichung $U = d\Phi/dt$ besteht im elektromagnetischen CGS-System die Einheitenbeziehung

$$1 [U]_{em} = \frac{1 [\Phi]_{em}}{1 [t]_{em}} \quad (1)$$

und mit

$$1 [\Phi]_{em} = 1 \text{ M} = \text{cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-1} \quad (2)$$

$$1 [t]_{em} = 1 \text{ s} \quad (3)$$

ergibt sich

$$1 [U]_{em} = 1 \text{ Ms}^{-1} = 1 \text{ cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-2} \quad (4)$$

Das aus dem elektromagnetischen CGS-System abgeleitete Quadrantsystem ist ebenfalls ein Dreier-System. Die Spannungseinheit dieses Systems ist die sogenannte absolute praktische Einheit, für die sich schon 1873 der Name Volt findet. Er wurde 1881 international angenommen [2]. Hiernach ist

$$1 \text{ V} = 10^8 [U]_{em} = 10^8 \text{ cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-2} \quad (5)$$

und mit Gl. (4)

$$1 \text{ M} = 10^{-8} \text{ Vs} . \quad (6)$$

Alle drei in Gl. (6) verwendeten Einheiten (M, V und s) sind hier noch echte Dreiersystem-Einheiten.

Der Übergang zum Vierer-System

Der Übergang von den Einheiten der Dreier- zu denen der Vierer-Systeme ist (für unsere Betrachtung) gekennzeichnet durch zwei Schritte:

a) Durch die Einführung einer vierten (elektrischen oder magnetischen) Grundgröße und damit einer vierten Grundeinheit. Verbunden war dieser Übergang zum Vierersystem mit der gleichzeitigen Einführung der Influenzkonstanten ϵ_0 und der Induktionskonstanten μ_0 , deren zahlenmäßige Festlegung den gleichzeitigen Übergang zur rationalen Schreibweise der Gleichungen ermöglichte. (Die Einführung der beiden Größen ϵ_0 und μ_0 kann man auch als einen Schritt zur Einführung eines Fünfer-Systems ansehen, das aus drei mechanischen, einer elektrischen und einer magnetischen Grundgröße besteht. In den folgenden Ausführungen wollen wir jedoch die Frage der Fünfer-Systeme ausklammern und uns lediglich mit den oben genannten Beziehungen zwischen den Dreier- und Vierer-Systemen befassen. Ebenso soll die bereits von anderer Seite [3] angeschnittene Frage ausgeklammert werden, ob nicht schon in den CGS-Systemen die elektrischen und magnetischen Größen als Vierergrößen angesehen wurden.)

b) Durch den Beschluß, als elektrische Einheiten der Vierer-Systeme die „praktischen Einheiten“ zu verwenden, also z. B. als Spannungseinheit das Volt, als Stromstärkeeinheit das Ampere [4]. Dies gilt inzwischen für alle bisher bekannt gewordenen Vierer-Systeme (GIORGI-System, MIE-System und Internationales Einheitensystem).

Die Einheit Maxwell und das Internationale Einheitensystem

Wir betrachten nochmals die Einheitengleichung (6). Auf der rechten Seite stehen zwei Einheiten, die beide ursprünglich Einheiten eines Dreier-Systems waren und heute als Vierersystem-Einheiten aufgefaßt werden können. Die eine dieser beiden Einheiten (s) ist als solche in die Vierer-Systeme übernommen, die andere (V) durch Beschluß zur Vierersystem-Einheit ernannt worden.

Natürlich kann man sich heute auf den Standpunkt stellen, daß Gl. (6) dann nicht mehr gültig sein könne, wenn man die Einheiten V und s als Vierersystem-Einheiten auffasse, da ja die Einheit Maxwell (wie die Einheiten Gauß und Oersted) Dreier-Einheit geblieben sei. Aber Gl. (6) ist heute noch immer richtig, wenn man V und s als Dreier-Einheiten auffaßt. Es ist also nicht möglich, die Entspricht-Beziehung anstelle (Gl. 6) als einzig mögliche Beziehung zu bezeichnen, sondern es muß heute daneben auch Gl. (6) als gültig angesehen werden. Daß dieses Nebeneinander nicht nur unschön ist, sondern auch bedenklich verwirrt, liegt auf der Hand. Die Unklarheiten kommen aber nicht daher, daß heute ganz überwiegend Gl. (6) und nicht die Entspricht-Beziehung benutzt wird, sondern daher, daß man seinerzeit die elektrischen Einheiten des Quadrant-Systems gleichzeitig als Dreier- und Vierereinheiten hat gelten lassen, aber diese Freiheit den magnetischen Einheiten des CGS-Systems nicht zugebilligt hat. Will man heute diese Unklarheiten beseitigen, so sind grundsätzlich zwei Wege möglich: Entweder man hebt die Gültigkeit der Namen Volt, Ampere usw. für die praktischen Einheiten als Dreier-Einheiten auf und erklärt damit Gl. (6) als nunmehr ungültig, oder aber man erkennt auch die Einheiten Maxwell, Gauß und Oersted als Vierer-Einheiten an, holt also auf diese Weise das seinerzeit Versäumte nach. Es bleibt dann Gl. (6) gültig, während die Entspricht-Beziehung überflüssig wird. Daß sich die praktisch rechnende Elektrotechnik für den zweiten Weg entscheiden wird, der ja dem bisher durchweg geübten Brauch entspricht und der durch den AEF schon vor Jahren festgelegt wurde [5], darüber dürfte wohl kaum ein Zweifel bestehen. Damit wäre wahrscheinlich auch das wirksamste Mittel gefunden, die Dreier-Systeme als solche für die Elektrotechnik endgültig in der Versenkung verschwinden zu lassen.

Die Einheiten Gauß und Oersted

Für die Einheit Gauß des Dreier-Systems gilt sinngemäß das zur Einheit Maxwell Gesagte. Im Dreier-System ist

$$1 \text{ G} = 10^{-8} \text{ Vs cm}^{-2}. \quad (7)$$

Auf der rechten Seite stehen nur Einheiten, die inzwischen im Internationalen Einheiten-System unmittelbar (s), mittelbar ($\text{cm} = 10^{-2} \text{ m}$) oder durch Beschluß (V) Heimat gefunden haben. Auch hier sollte man nicht mehr die Einheit Gauß als Dreiersystem-Einheit auffassen und das Entspricht-Zeichen setzen, sondern es bei der heute durchweg benutzten Gl. (7) belassen und sowohl V als auch G als Vierer-Einheit betrachten.

Bei der Einheit Oersted scheinen die Verhältnisse nicht ganz so einfach zu liegen, wenn man von der Einheitenbeziehung

$$\text{Oe} = \frac{\text{G}}{\mu_0} \quad (8)$$

ausgeht. Hier erscheint in der Einheitenbeziehung die Induktionskonstante μ_0 , deren Einführung, wie bereits erwähnt, bei dem Übergang vom Dreier- zum Vierer-System eine Rolle gespielt hatte. In der Tat beeinflußt auch die Induktionskonstante die Beziehung zwischen den Feldstärkeeinheiten der Vierer- und Dreier-Systeme durch das Auftauchen des Faktors 4π (Verhältnis der rationalen zur entsprechenden nichtrationalen Einheit). Da die Stromstärke-einheit des elektromagnetischen CGS-Systems zehnmal größer als die Einheit Ampere des Quadrant-Systems ist, hat man nach Übernahme der Einheit Ampere in die Vierer-Systeme

$$4\pi \text{ Oe} = 10 \frac{\text{A}}{\text{cm}} = 10^3 \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (9)$$

gesetzt. Auch hier stehen, außer auf der linken Seite von Gl. (9), Einheiten, die in die Vierer-Systeme übernommen worden sind. Holt man dies für die Einheit Oe nach, so kann Gl. (9) unbedenklich weiter benutzt werden, und die schwer verwendbare Entspricht-Beziehung wird hier ebenfalls überflüssig.

Weitere Entwicklung

Wenn die Einheiten Maxwell, Gauß und Oersted als Vierer-Einheiten übernommen sind und damit die weitere Gültigkeit der vorstehenden Gl. (6), (7) und (9) gewährleistet ist, dann könnte man schließlich — wenn man Wert darauf legt, völlig klare Verhältnisse zu schaffen und jede Doppeldeutigkeit zu vermeiden — in Aussicht nehmen, die Namen sowohl der praktischen Einheiten (Volt, Ampere usw.) als auch der Einheiten Maxwell, Gauß und Oersted von den Dreier-Einheiten zu trennen und sie nur noch für die Vierer-Einheiten zu verwenden. Bis zur Verwirklichung dieser Lösung kann man folgendermaßen verfahren: Will man zum Ausdruck bringen, daß in den Gln. (6), (7) und (8) Dreier-Einheiten gemeint sind, möge man die magnetischen und elektrischen Einheiten mit dem Index III versehen, im anderen Fall mit dem Index IV. Nach den bisherigen Erfahrungen kann man wohl sagen, daß sich in den meisten Fällen eine derartige Index-Kennzeichnung erübrigt. Mißverständnisse sind nicht möglich. Eine Beziehung zwischen Dreier-Einheiten und Vierer-Einheiten sollte man nicht über ein Entspricht-Zeichen herzustellen versuchen, sondern eine Gleichung mit einem System-Verbindungsfaktor (k) benutzen, z. B. für die Verbindung zwischen dem Dreier-Gauß und der Vierer-Einheit Tesla ($1 \text{ T} = 1 \text{ Vs m}^{-2}$) die Gleichung

$$G_{\text{III}} = k \cdot 10^{-4} \text{ T} \quad (10)$$

mit $k = G_{\text{III}}/G_{\text{IV}} = \sqrt{10^7 \text{ Am/Vs}} = \sqrt{4\pi/\mu_0}.$

Literatur

- [1] STILLE, U.: Arch. Elektrotechnik Bd. 40 (1952) S. 254, insbesondere auch Fußn. 5. — [2] STILLE, U.: Messen und Rechnen in der Physik, S. 213 u. 214. Braunschweig 1955. — [3] WALLOT, J.: Arch. Elektrotechnik Bd. 40 (1952) S. 256; J. FISCHER, ebenda, S. 257. — [4] wie [2], S. 216. — [5] DIN 1325, Ausgabe 1939; DIN 1301, Ausgabe 1955; DIN 1339, Ausgabe 1958.

Professor Dr.-Ing. E. FLEGLER, Aachen, Schinkelstr.
Technische Hochschule, Rogowski-Institut für Elektrotechnik

Die Einheiten Maxwell, Gauß, Oersted

Von

J. FISCHER, Karlsruhe

(Eingegangen am 12. Dezember 1959)

Dem praktischen Elektrotechniker und Physiker sind die folgenden Einheiten für den magnetischen Induktionsfluß Φ , für die magnetische Induktion (Flußdichte) B und für die magnetische Feldstärke H geläufig:

$$\left. \begin{aligned} [\Phi] &= 1 \text{ Maxwell} = 10^{-8} \text{ Volt s}, \\ [B] &= 1 \text{ Gauß} = 1 \text{ Maxwell/cm}^2 = 10^{-8} \frac{\text{Volt s}}{\text{cm}^2}, \\ [H] &= 1 \text{ Oersted} = \frac{10}{4\pi} \frac{\text{Ampere}}{\text{cm}}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Wir wollen für sie im Folgenden die Kurzzeichen M, G, Oe benutzen und für Volt V, für Ampere A schreiben.

Man findet diese Einheitenbeziehungen von jeher in Lehr- und Nachschlagebüchern der Elektrotechnik, in Tabellenwerken, in Normblättern¹ und in Lehrbüchern der Physik². Der Praktiker benutzt diese Einheiten manchmal weniger deshalb, weil sich mit ihnen handliche Zahlenwerte ergeben, was ja nicht in jedem denkbaren Fall zutreffen kann³, sondern mehr aus dem Grunde, weil er dann Zahlenwertgleichungen und Zahlenangaben, die er in Nachschlagewerken, in Tabellenwerken und in der wissenschaftlichen Literatur von Jahrzehnten findet, in seinen Zahlenrechnungen unmittelbar und ohne Umformungen und Einheiten-Umrechnungen einsetzen kann. Selbst wenn der Praktiker in dem Wunsch, einer Empfehlung zu folgen oder einer Vorschrift zu gehorchen, künftig diese Einheiten nicht mehr selbst benutzen würde, so dürfte er trotzdem die Kenntnis der Beziehungen (1) nicht verlieren, denn damit würde er sich selbst die Literatur verschließen.

Um die Herkunft und die Berechtigung der Beziehungen (1) wird sich der praktische Elektrotechniker und Physiker im allgemeinen wenig kümmern, er wird jedoch mit einem Blick auf die rechten Seiten der Gleichungen feststellen, daß ihm auch von der praktischen meßtechnischen Seite her keine Schwierigkeiten erwachsen, denn er findet seine Strommesser immer in Ampere, seine Spannungsmesser immer in Volt, seine Flußmesser in Maxwell ausgeteilt. Den Zahlungsfaktor $10/4\pi = 0,796 \dots$ wird der Praktiker nicht anders hinnehmen, als die Umrechnung von Zoll in Zentimeter, die ebenso zu seinen Berufsfertigkeiten gehört, wie die Kenntnis der englischen Sprache.

Gegen die Beziehungen (1) sind in den letzten Jahren Einwände laut geworden. Da diese geeignet sind, Unsicherheit hervorzurufen, stellen wir hier zwei der wichtigsten Gesichtspunkte noch einmal zusammen.

I.

Der erste Einwand beruft sich auf Beschlüsse zwischenstaatlicher Körperschaften, die 1900 und 1930 gefaßt worden sind⁴; nach diesen gilt

$$\text{M/cm}^2 = \text{G} = \text{Oe} = \frac{1}{s} \sqrt{\frac{\text{g}}{\text{cm}}} = \sqrt{\frac{\text{dyn}}{\text{cm}}}. \quad (2)$$

¹ Zum Beispiel DIN 1339, Einheiten magnetischer Größen, Ausgabe 1958; DIN 1301, Einheiten, Kurzzeichen, Ausgabe 1955.

² BECKER, R.: Theorie der Elektrizität 1. Band, 16. Aufl., neu bearbeitet von F. SAUTER. Stuttgart 1957.

³ Zum Beispiel ist in der Elektrotechnik recht häufig die Einheit Kilogaß bequem, wenn es sich um magnetisch weiches oder magnetisch hartes Eisen handelt.

⁴ Zusammenfassende Darstellung in: U. STILLE, Messen und Rechnen in der Physik. Braunschweig 1955.

Hiernach sind die Einheiten G und Oe gleich, und alle drei Einheiten sind ersichtlich mechanische Größen deswegen, weil cm, g, s, drei Grundeinheiten der Mechanik sind. (Die Einheiten (2) wurden und werden absolute elektromagnetische Einheiten genannt.) Nun sind aber V und A anerkannt als Einheiten eines Einheitensystemes, das nicht drei, sondern vier unabhängige Grundeinheiten hat, nämlich heute m, kg, s, A⁵. Die Gleichungen (1) könnten, so wird gesagt, deswegen nicht bestehen, weil M, G, Oe nach (2) einem Einheitensystem mit drei, dagegen V und A einem Einheitensystem mit vier unabhängigen Grundeinheiten angehören. G und 10⁻⁸ V s/cm² zum Beispiel entsprächen zwar einander, könnten aber deswegen nicht einander gleich sein.

Der praktisch messende Physiker und Elektrotechniker (und ihm soll ja durch Festsetzung von Einheiten geholfen werden!) wird allerdings vielleicht gegen diese Auffassung Bedenken haben. Er wird geltend machen, daß er mit demselben Meßinstrument jederzeit dieselbe Größe gemessen habe, ganz unabhängig davon, ob zu zwei verschiedenen Zeiten zwei verschiedene Definitionen gültig waren, oder ob in den beiden Fällen dieselbe Definition gegolten hat. In der Tat war es auch stets, wenn eine Änderung einer Definition beschlossen wurde, eines der wichtigsten Anliegen der Beschlußfassenden, den Betrag der Einheit nicht zu ändern, mit anderen Worten, den Meßtechniker die Änderung der Definition nicht merken zu lassen^{5a}.

Man kann gegen diesen ersten Einwand heute das Folgende sagen:

1. Man hat heute nicht mehr den Wunsch, die elektrischen und magnetischen Erscheinungen und Vorgänge mittels mechanischer Größen zu beschreiben, also mittels solcher Größen, deren Grunddimensionen nur die Masse, die Zeit und die Länge sind. Nur zu diesen mechanischen Größen passen die in (2) genannten mechanischen Einheiten.

2. Die in (2) genannten Einheiten entstehen, wenn man annimmt, daß man die Induktionskonstante μ_0 (die Permeabilität des leeren Raumes) gleich der reinen (unbenannten) Zahl eins setzen könne. Die Meinung, daß diese willkürliche Verfügung nützlich wäre, wird heute überwiegend nicht mehr aufrecht erhalten, es lassen sich im Gegenteil Gründe dafür angeben, daß sie nicht einmal zulässig sei. Ein wesentlicher Fortschritt in der Theorie, nämlich eine außerordentliche Vereinfachung und zugleich Vervollständigung, ist von J. WALLOT erzielt worden⁶. Nach dieser Theorie sind cm, g, s und μ_0 die Grundeinheiten der absoluten elektromagnetischen Einheiten, und an Stelle von (2) gilt

$$\left. \begin{aligned} G &= \frac{1}{s} \sqrt{\frac{\mu_0 \cdot g}{4 \pi \text{ cm}}} = \frac{1}{\text{cm}} \sqrt{\frac{\mu_0 \cdot \text{dyn}}{4 \pi}} = \frac{M}{\text{cm}^2}, \\ \text{Oe} &= \frac{1}{s} \sqrt{\frac{g}{4 \pi \mu_0 \cdot \text{cm}}} = \frac{1}{\text{cm}} \sqrt{\frac{\text{dyn}}{4 \pi \mu_0}}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

daher $G = \mu_0 \cdot \text{Oe}$. Diese Beziehungen sind aber mit den Beziehungen (1) identisch⁷.

⁵ Daher zum Beispiel $V = \frac{\text{m}^2 \text{ kg}}{\text{s}^3 \text{ A}}$.

^{5a} Den Namen Ampere haben hintereinander drei Stromstärkeeinheiten erhalten: die Quadranteinheit (ein Potenzenprodukt aus den drei mechanischen Einheiten cm, g, s), das selbständige Silbervoltmeter-Ampere und das Ampere des heutigen „Systemes der Internationalen Einheiten“, und innerhalb einer gewissen Meßgenauigkeit sind die drei verschieden definierten Ampere gleich groß.

⁶ WALLOT, J.: Handbuch der Physik, herausgegeben von H. GEIGER und K. SCHEEL, Band II, Kapitel I, Größengleichungen, Einheiten und Dimensionen, Berlin 1926; 2. Auflage, Leipzig 1957.

⁷ Man rechnet die Gleichungen (3) in die Gleichungen (1) leicht um, indem man beachtet

$$\begin{aligned} \text{cm g s}^{-2} &= \text{dyn} = 10^{-7} \text{ V A s/cm}, \\ \mu_0 &= \frac{4 \pi \text{ V s}}{10^9 \text{ A cm}} = \frac{4 \pi \text{ dyn}}{100 \text{ A}^2}. \end{aligned}$$

Beides sind exakte Beziehungen, keine Näherungen.

II.

Der zweite Einwand (der mit dem ersten zusammenhängt), stellt sich für den Praktiker so dar: Die in (1) genannte Beziehung

$$1 \text{ Oe} = \frac{10}{4\pi} \frac{\text{A}}{\text{cm}} \quad (4)$$

ist unzutreffend; ist sie in der Praxis benutzt worden, so beruht das auf einer irrtümlichen Auffassung; zutreffend ist die Beziehung

$$1 \text{ Oe} = 10 \frac{\text{A}}{\text{cm}}. \quad (5)$$

Dieser Einwand wiegt wesentlich schwerer, als der erste, denn man kann ihm nicht, wie bei I., mit dem Hinweis begegnen, daß die Theorie der Einheiten seit dem Zeitpunkt älterer Beschlußfassungen weiter fortgeschritten ist, vielmehr handelt es sich hier um einen Unterschied in der absoluten Größe der Einheit Oersted um den Zahlenfaktor 4π . Es lohnt sich, über Zahlenfaktoren von der Größenordnung einer Zehnerpotenz nachzudenken.

Als im Jahr 1930 beschlossen wurde, der absoluten elektromagnetischen Einheit der magnetischen Feldstärke den Namen „Oersted“ zu geben, war mit größter Wahrscheinlichkeit die Einheit des (üblichen und verbreiteten) nicht rationalen elektromagnetischen CGS-Systemes gemeint. Wir wollen dies annehmen. Es waren zwar damals auch schon die Begriffe: Größengleichungen und Zahlenwertgleichungen bekannt, jedoch ist das Oersted nicht durch eine Gleichung festgelegt worden, weder durch (4), noch durch (5), und auf Größengleichungen irgendwelcher Form ist nicht Bezug genommen worden. Es ist daher hier sicher zweckmäßig, zuerst (a) die magnetische Feldstärke, die 1 Oersted genannt werden soll, durch eine erdachte Versuchsanordnung mit bestimmten Versuchsbedingungen festzulegen, hierauf (b) die Beziehungen zu den Größendefinitionen und Größengleichungen herzustellen. Dabei wird es sich zeigen, daß dieser zweite Vorgang unerläßlich ist, denn die Einheitengleichungen eines Systemes hängen nicht allein von den zugehörigen Zahlenwertgleichungen ab, sondern auch von den Größengleichungen.

a) Experimentelle Definition des Oersted durch eine Normalanordnung

Besonders einfach ist der gerade, unendlich lange fadenförmige Stromleiter von vernachlässigbar kleinem Durchmesser; er selbst und der ganze Raum, in den er eingebettet ist, soll dieselbe Permeabilität haben. Wird er von einem Strom I durchflossen, so besteht in einem radialen Abstand r eine magnetische Feldstärke H . Da es sich um die Feldstärkeeinheit des nichtrationalen elektromagnetischen CGS-Systemes handeln soll, müssen die nichtrational geschriebenen Zahlenwertgleichungen dieses Systemes herangezogen werden, hier also die Gleichung

$$\{H\} = \frac{2 \{I\}}{\{r\}}. \quad (6)$$

Der Zahlenwert $\{H\}$ der magnetischen Feldstärke ist auf die Einheit 1 Oersted bezogen, der Zahlenwert $\{I\}$ der Stromstärke auf 1 elektromagnetische CGS-Einheit gleich 10 Ampere, der Zahlenwert $\{r\}$ des senkrechten Abstandes von der Achse auf 1 cm. (Zahlenwertgleichungen sind sinnlos, wenn nicht angegeben wird, auf welche Einheiten sie bezogen sind.) Wird daher der Stromleiter von 10 A durchflossen, so ist im Abstand von 2 cm der Zahlenwert der magnetischen Feldstärke

$$\{H\} = 1, \quad (7)$$

und dieses ist also der Zahlenwert der magnetischen Feldstärke, bezogen auf die Einheit 1 Oersted. — Natürlich kann man auch andere Normalanordnungen wählen, etwa eine lange dünne Zylinderspule, oder einen kreisförmigen Stromleiter; es müssen dann in entsprechender Weise gewisse Zahlenwerte (Versuchsbedingungen) gegeben werden⁸. Alle diese Möglichkeiten

⁸ Zum Beispiel: Die sehr lange dünne zylindrische Spule hat auf 1 m axialer Länge $w = 1000$ Windungen, die vom Strom 10 A durchflossen werden. Dann besteht im Inneren der Spule die magnetische Feldstärke 4π Oersted. — Hier gilt nämlich die Zahlenwertgleichung $\{H\} = 4\pi w \{I\}/\{l\}$ des nichtrationalen elektromagnetischen CGS-Systemes; die Länge ist auf die Einheit 1 cm, die Stromstärke ist auf die nichtrationale elektromagnetische CGS-Einheit gleich 10 A bezogen, daher ist $\{H\} = 4\pi$.

wollen wir „experimentelle Definitionen“ der magnetischen Feldstärke nennen. Das allen Gemeinsame ist die Form

$$\oint \{H\} \{ds\} = 4\pi \{I\} \quad (8)$$

des Durchflutungsgesetzes, dieses als Zahlenwertgleichung geschrieben, bezogen auf nicht-rationale elektromagnetische CGS-Einheiten.

Für diese experimentelle Definition ist also keine Voraussetzung darüber gemacht, wie etwa ihrerseits die elektromagnetische CGS-Einheit der Stromstärke definiert ist.

b) Definition des Oersted mit Hilfe von Größengleichungen

Hierfür ist die WALLOTSche „Verknüpfungsbeziehung“ von entscheidendem Nutzen. Sie sagt Folgendes aus⁹: Besteht zwischen Größen $A, G_1 \dots G_n$ eine allgemeine Größengleichung von der Form

$$A = Z \cdot G_1^{a_1} \cdot G_2^{a_2} \cdot \dots \cdot G_n^{a_n}, \quad (9)$$

in welcher Z der (exakte) Zahlenfaktor ist (zum Beispiel $Z = 1/2$ in $W = m v^2/2$), sind

$$\{A\} = z \cdot \{G_1\}^{a_1} \cdot \{G_2\}^{a_2} \cdot \dots \cdot \{G_n\}^{a_n} \quad (10)$$

die zugehörige Zahlenwertgleichung und

$$[A] = \zeta \cdot [G_1]^{a_1} \cdot [G_2]^{a_2} \cdot \dots \cdot [G_n]^{a_n} \quad (11)$$

die zugehörige Einheitengleichung, so gilt stets die Verknüpfungsbeziehung

$$Z = z \zeta, \quad (12)$$

wie man leicht durch Einsetzen allgemein bestätigt. Man sieht, daß in der Tat die Einheitengleichungen (ζ) nicht allein von den Zahlenwertgleichungen (z) abhängen und umgekehrt, sondern daß die Größengleichungen (Z) an dem Zusammenhang maßgebend beteiligt sind¹⁰. — Einheiten heißen kohärent, wenn in der sie verknüpfenden Einheitengleichung $\zeta = 1$ ist. Sind die Einheiten kohärent, so haben die Größengleichung und die ihr entsprechende Zahlenwertgleichung dieselbe Form, denn es ist dann $\zeta = 1 = Z/z$ oder $z = Z$.

In Gl. (6)

$$\{H\} = \frac{2 \{I\}}{\{r\}} \quad (6)$$

ist also der Zahlenfaktor $z = 2$. Alles Weitere folgt mit Rücksicht auf die Verknüpfungsgleichung (12) zwangsläufig:

α) Definiert man eine Größe H' durch die Größengleichung

$$H' = \frac{2 I}{r}, \quad (13)$$

so folgt aus dieser und der Zahlenwertgleichung (6) die Einheitengleichung

$$[H'] = \frac{[I]}{[r]} = \frac{10 \text{ A}}{\text{cm}} = 1 \text{ Oe}' . \quad (14)$$

[In der Größengleichung (13) ist $Z = 2$, in der Zahlenwertgleichung (6) ist $z = 2$, in der Einheitengleichung (14) ist daher $\zeta = Z/z = 1$.] Nach der Größengleichung hat in der gewählten Anordnung die magnetische Feldstärke im Aufpunkt die Größe

$$H' = \frac{2 \cdot 10 \text{ A}}{2 \text{ cm}} = 10 \frac{\text{A}}{\text{cm}} = 1 \text{ Oe}' .$$

⁹ WALLOT, J.: Arch. f. Elektrotechn. Bd. 40 (1952) S. 325—331; Größengleichungen, Einheiten und Dimensionen, Paragraph 35. Leipzig 1957.

¹⁰ Beispiel: Gehört zu der Größengleichung $W = m v^2/2$ die Zahlenwertgleichung $\{W\} = \{m\} \{v\}^2/2$, so ist notwendig die Einheitengleichung $[W] = 1 [m] [L]^2/[t]^2$; aus $Z = 1/2 = z$ folgt notwendig $\zeta = 1$. Hätte man zu derselben Zahlenwertgleichung die Größengleichung $W' = m v^2$ gesetzt, so wäre aus $Z = 1, z = 2$ gekommen $\zeta = 2$, die Einheitengleichung hieße $[W'] = 2 [m] [L]^2/[t]^2$. Das triviale Beispiel zeigt den Nutzen der Verknüpfungsgleichung (12) für die Darstellung. Hierzu vergleiche auch Fußn. 11.

β) Definiert man eine andere Größe H durch die Größengleichung

$$H = \frac{I}{2 \pi r}, \quad (15)$$

so folgt aus dieser und der Zahlenwertgleichung (6) die Einheitengleichung

$$[H] = \frac{1}{4 \pi} \frac{[I]}{[r]} = \frac{1}{4 \pi} \frac{10 \text{ A}}{\text{cm}} = 1 \text{ Oe}. \quad (16)$$

[In der Größengleichung (15) ist $Z = 1/2 \pi$, in der Zahlenwertgleichung (6) ist $z = 2$, in der Einheitengleichung (16) ist daher $\zeta = Z/z = 1/4 \pi$.] Nach der Größengleichung (15) hat in der gewählten Normalanordnung die magnetische Feldstärke im Aufpunkt die Größe

$$H = \frac{10 \text{ A}}{2 \pi \cdot 2 \text{ cm}} = \frac{1}{4 \pi} \frac{10 \text{ A}}{\text{cm}} = 1 \text{ Oe}.$$

Das magnetische Feld als physikalischer Zustand ist natürlich in beiden Fällen α), β) dasselbe. Stromstärke und Abstand sind ja in beiden Fällen dieselben. Dasselbe magnetische Feld wird nur durch zwei verschieden definierte Größen H' und H gekennzeichnet. Wir vergleichen die beiden Größen und die beiden Einheiten:

$$H' = 4 \pi H, \text{ Oe}' = 4 \pi \text{ Oe}, \quad (17)$$

daher

$$\frac{H'}{\text{Oe}'} = \frac{H}{\text{Oe}} = \{H\}. \quad (18)$$

Wie wir mit (6) vorausgesetzt haben, ist der Zahlenwert in beiden Fällen gleich, und in dem besonderen Falle der Normalanordnung ist er also $\{H\} = 1$. Die Größe H' ist um genau denselben Zahlenfaktor größer, als die Größe H , um welchen die Einheit Oe' größer ist, als die Einheit Oe .

Wir nennen H' und Oe' die nichtrational definierte Größe und Einheit, H und Oe die rational definierte Größe und Einheit. Die Beziehungen, die zwischen rational und nicht-rational definierten Größen und Einheiten bestehen, lassen sich hiernach ersichtlich mit Hilfe der WALLOTSchen Verknüpfungsgleichung besonders einfach darstellen¹¹.

Für die Praxis ist es sicherlich unzweckmäßig, zwei verschiedene Größen und zwei verschiedene Einheiten nebeneinander zu führen. Da der erwähnte Beschluß über die Namensgebung „Oersted“ auf Größendefinitionen und Größengleichungen, wie schon erwähnt, keinen Bezug genommen hat, kann hier eine zusätzliche Entscheidung auf gar keine Weise umgangen werden. Entscheidet man sich für die nichtrationale Definition H' der Größe, so hat man die Einheitengleichung (14), entscheidet man sich für die rationale Definition H der Größe, so hat man die Einheitengleichung (16). Mit der nichtrational definierten Größe H' gilt das Durchflutungsgesetz in der Form

$$\oint H' ds = 4 \pi I, \quad (19)$$

mit der rational definierten Größe H gilt es in der Form

$$\oint H ds = I. \quad (20)$$

¹¹ Ein anderes Beispiel für eine experimentelle Definition und für die Anwendung der WALLOTSchen Verknüpfungsgleichung ist das COULOMBSche Kraftgesetz der Elektrostatik und die Definition der elektrostatischen CGS-Einheit $[Q]_e$ der elektrischen Ladung: Für zwei gleich große elektrische Ladungen Q schreiben wir das COULOMBSche Gesetz als Größengleichung

$$Q^2 = 4 \pi \varepsilon r^2 F, \quad \text{also} \quad Z = 4 \pi. \quad (\text{B } 1)$$

Ausgeschrieben:

$$\{Q\}^2 [Q]^2 = 4 \pi \{\varepsilon\} \{r\}^2 \{F\} \cdot [\varepsilon] [r]^2 [F]. \quad (\text{B } 2)$$

Die elektrostatische CGS-Einheit $[Q]_e$ ist definiert durch die Bedingung, daß $\{Q\} = 1$ sei für $\{\varepsilon\} = 1$, $\{r\} = 1$, $\{F\} = 1$; $[\varepsilon] = \varepsilon_0$, $[r] = \text{cm}$, $[F] = \text{dyn}$. Setzt man diese Bedingungen in (B 2) ein, so ergibt sich die Einheitengleichung

$$[Q]_e^2 = 4 \pi \varepsilon_0 \text{ cm}^2 \text{ dyn}, \quad \text{also} \quad \zeta = 4 \pi. \quad (\text{B } 3)$$

Dividiert man (B 2) durch (B 3), so erhält man

$$\{Q\}^2 = \{\varepsilon\} \{r\}^2 \{F\}, \quad \text{also} \quad z = 1; \quad (\text{B } 4)$$

in der Tat ist $\{Q\} = Z/\zeta = 1$, wie für die experimentelle Definition verlangt war.

Die Entscheidung fällt klar zugunsten der rationaldefinierten magnetischen Feldstärke H und daher der Einheit Oersted nach (16) und (4) aus, wenn man folgende Gesichtspunkte bedenkt:

1. Größengleichungen sind insofern die ideale Darstellungsform für physikalische Sachverhalte, als sie von der Willkür der Einheiten frei sind. Sie haben die einfachste Form, wenn sie rational geschrieben werden [man vergleiche zum Beispiel Gl. (19) mit (20).]

2. Hinsichtlich der Einheiten geht die Entwicklung immer deutlicher auf die Benutzung der Einheiten hin, die aus den Grundeinheiten kg, m, s, A kohärent abgeleitet werden. Dieses ist ein rationales System, die Zahlenwertgleichungen werden rational geschrieben. Wegen der Kohärenz ($\zeta = 1$) ist $Z = z$, mit anderen Worten: Die Zahlenwertgleichungen dieses Systemes haben dieselbe Form, wie die rational geschriebenen Größengleichungen. Verwendet man dagegen nicht rational definierte Größen, so geht dieser große Vorteil verloren.

Beide Gründe sprechen dafür, die rational definierten Größen und daher die rational geschriebenen Größengleichungen zu benutzen¹². Ihnen gegenüber ist der Nachteil gering, daß in der Einheitengleichung (16) der Zahlenfaktor 4π auftritt.

Wir führen noch einen dritten Grund an: Oben war festgestellt worden, daß über die Beschlußfassung der Namensgebung „Oersted“ hinaus eine zusätzliche Entscheidung unumgänglich ist, wenn man Eindeutigkeit herstellen will. Diese zusätzliche Entscheidung darf man darin sehen, daß in Technik und Physik bisher praktisch ausnahmslos die Gleichung

$$1 \text{ Oe} = \frac{10}{4\pi} \frac{\text{A}}{\text{cm}}$$

anerkannt und benutzt worden ist. Die Praxis hat also die notwendige zusätzliche Entscheidung schon gefällt, sie hat sich für diese Einheit und daher für die rational definierte magnetische Feldstärke H schon entschieden. Sie benutzt diese und keine andere Einheitengleichung, und zwar gänzlich unabhängig davon, wie die Stromstärkeeinheit Ampere definiert ist.

Liegt die Einheit Oe fest, so sind auch die Einheiten $G = \mu_0 \cdot \text{Oe}$ und $M = \text{cm}^2 \cdot G$ gegeben. Es ist $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-9} \text{ V s/A cm}$.

III.

Indem wir verallgemeinern, können wir zu der Frage der rationalen und nichtrationalen Definitionen von Größen und Einheiten Folgendes sagen:

a) Die Zahlenwertgleichungen der CGS-Systeme sind von jeher ganz überwiegend nicht-rational geschrieben worden ($\zeta \neq 1$ in einigen Gleichungen). Dies ist eine historische Tatsache, die man, weil sie historisch ist, nicht mehr ändern kann.

b) Die beste Schreibweise der Größengleichungen der Elektrizitätslehre ist die rationale, aus den beiden oben angeführten Gründen.

c) Verwendet man zusammen miteinander rational geschriebene Größengleichungen und nichtrational geschriebene Zahlenwertgleichungen, so ist notwendig in einigen Einheitengleichungen $\zeta \neq 1$, einige Einheiten kohärieren nicht.

d) Erhebt man jedoch die Kohärenz aller Einheiten zum Postulat ($\zeta = 1$ ausnahmslos), so muß man einerseits bei den nichtrationalen CGS-Systemen nichtrational definierte Größen, also nichtrational geschriebene Größengleichungen einführen, andererseits bei dem heute eingeführten praktischen System rational definierte Größen, also rational geschriebene Größengleichungen.

e) Dies ist eine in physikalischer Hinsicht ganz unnötige Doppelspur; man darf urteilen, daß sie dem Sinn der Größengleichungen widerspricht. Dem gegenüber ist die Inkohärenz einiger Einheiten bei dem Vorgehen nach c) offenbar der kleinere Nachteil. Sie wird ja auch sonst in der Praxis hingenommen. Es ist wahrscheinlich einfacher, in einigen Einheitengleichungen einen Zahlenfaktor $\zeta \neq 1$ zu haben, als für eine Anzahl von Größen zwei voneinander verschiedene Definitionen kennen und auch wissen zu müssen, wann diese, und wann jene Definition benutzt werden muß.

¹² So auch in dem Normblatt DIN 1313, Schreibweise physikalischer Gleichungen, Ausgabe 1931.

Beitrag zur Kenntnis der Ionenbewegung in Halbleitern

Von

FRANZ OLLENDORFF

(Mitteilung aus dem Forschungsinstitut für Elektronik am Technion,
Israel Institute of Technology, Haifa)

Mit 7 Textabbildungen

(Eingegangen am 25. August 1959)

Inhaltsübersicht: 1. Ziel der Arbeit. — 2. Die Grundgleichungen. — 3. Lösung des Potentialproblems. — 4. Entwicklung des Halbleiter-Potentials in der Umgebung des Kanals. — 5. Das quasistatische Potential. — 6. Die Bremskraft. — 7. Zahlenbeispiel und Kritik. — 8. Zusammenfassung.

1. Ziel der Arbeit

Die moderne Halbleiterphysik beruht auf den Ausbreitungsgesetzen der Wahrscheinlichkeitswellen, welche die Elektrizitätsträger bei deren Bewegung durch das sozusagen eingepreßte, dreifach-periodische Potentialfeld des jeweils vorliegenden Kristallgitters begleiten. Auf Grund dieses einfachen Mechanismus können — im Grenzfalle verschwindend niedriger Absoluttemperatur — immer genau jene Elektrizitätsträger ihren Wohnraum hemmungslos durchwandern, deren individuelle Gesamtenergie η einem der „erlaubten“ Energiebänder $\Delta\eta$ angehört. Um daher den bei hinreichend hoher Temperatur tatsächlich auftretenden Bewegungswiderstand genetisch zu verstehen, muß man die thermischen Vibrationen des Kristallgitters in Rechnung stellen, welche gemäß ihrer wesentlich EINSTEIN-DEBYESchen Quantenstatistik dem vorher statischen Potentialfeld örtlich und zeitlich stochastisch schwankende Störungen aufzwingen; die ursprünglich ebenen Wahrscheinlichkeitswellen werden nunmehr teilweise gestreut und reflektiert. Ungeachtet der erfolgreichen Anwendung dieser Theorie auf das Leitfähigkeitsproblem verschweigt sie doch sowohl die dynamische Einwirkung je eines wandernden Ladungsträgers auf seine beweglichen Nachbarn wie auch die von ihm geweckte Polarisierung der Gitteratome. Da nun diese Erscheinungen in das physikalische Verhalten der Halbleiter entscheidend eingreifen, sollte man versuchen, ihnen rechnerisch nachzugehen; die vorliegende Arbeit will einen Beitrag zur Lösung dieser Frage liefern.

2. Die Grundgleichungen

Es liegt gewiß nahe, die gestellte Aufgabe als Vielkörper-Problem der Wellenmechanik anzusetzen; doch reichen meines Wissens die bisher bekannten mathematischen Hilfsmittel zur Lösung der entsprechenden SCHROEDINGER-Gleichung durchaus nicht hin. Unter dem Zwang dieser Sachlage werden wir daher die phänomenologischen, MAXWELLSchen Feldgleichungen als adäquate Beschreibung des elektromagnetischen Geschehens im Halbleiter anzusehen haben. Der Einfachheit halber ersetzen wir den tatsächlich vorgegebenen Kristall durch einen homogenen und isotropen Körper der elektrischen Leitfähigkeit κ und der Dielektrizitätskonstanten ϵ , den wir überdies mit der allerdings nur fiktiven Eigenschaft verschwindender Permeabilität μ ausstatten; in ihm orientieren wir uns an Hand des Bezugssystemes der Zylinderkoordinaten z (Achse), r (Radialdistanz) und α (Azimut). Nun richten wir unsere Aufmerksamkeit auf ein individuelles Ion der invarianten Ladung q , welches wir vorerst als materiellen Punkt im Sinne der klassischen Mechanik auffassen. Indem wir sowohl seinen elektrischen wie seinen magnetischen Spin geflissentlich außer Betracht lassen, begnügen wir uns mit der Angabe seiner trägen Masse m , welche, im Einklang mit der vorausgesetzten Isotropie des halbleitenden Körpers, als Skalar aufzufassen ist; doch mag ihre Größe von der jeweiligen Ionengeschwindigkeit v abhängen, welche ihrerseits während der Dauer der beabsichtigten Kontrolle als gleichförmig gelte. Die dann gewiß geradlinige

Ionenbahn mit der z -Achse des Bezugssystemes identifizierend, dürfen wir den Augenblick der Ionenpassage durch den Ursprung als Nullpunkt der laufenden Zeit t wählen, so daß die Gleichung

$$z_j = vt; \quad r_j = 0 \quad [-\infty < t < \infty] \quad (1)$$

den Ort $(z_j; r_j)$ des kontrollierten Ions oder, genauer gesagt, seines Schwerpunktes für alle Zeiten schildert.

Um uns von allen kinematischen Schwierigkeiten bei der Bewegung des Ions durch den Halbleiter zu befreien, statten wir diesen mit dem virtuellen „Kanal“

$$r < r_0, \quad -\infty < z < \infty \quad (2)$$

aus, welcher von Materie frei sei und also phänomenologisch durch die Angaben

$$\kappa_0 = 0; \quad \epsilon_0 = 1 \quad (3)$$

beschrieben wird; seine Permeabilität werde wiederum gleich Null gesetzt. Überdies ersetzen wir die bisher in $(z_j; r_j)$ konzentriert gedachte Punktladung vorübergehend durch eine Linienladung, welche längs der Strecke

$$z_j - \delta < z < z_j + \delta; \quad \delta > 0 \quad (4)$$

der Achse in der gleichförmigen Dichte

$$\lambda = \frac{q}{2\delta} \quad (5)$$

stetig verteilt sei, außerhalb dieser Strecke jedoch identisch verschwinde; sie wird somit durch das FOURIERSche Integral

$$\begin{aligned} \lambda(z; t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ilz} dl \int_{z_j-\delta}^{z_j+\delta} \frac{q}{2\delta} e^{ilz'} dz' = \frac{q}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin l\delta}{l\delta} e^{-il(z-vt)} dl \\ &= \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin l\delta}{l\delta} \cos l(z-vt) dl \end{aligned} \quad (6)$$

in ein kontinuierliches Spektrum harmonischer Wellen je der Wellenzahl l zerlegt, welche sämtlich mit der einheitlichen Phasengeschwindigkeit v in Richtung der positiven z -Achse fortschreiten. Eine in der Ebene $z = \text{const}$ im Kanal aufgespannte Kreisfläche wird daher von dem „eingepprägten“ Konvektionsstrom

$$J(z; t) = v \cdot \lambda(z; t) = \frac{qv}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin l\delta}{l\delta} \cos l(z-vt) dl \quad (7)$$

durchflossen; gesucht wird das von ihm im Raume $r > r_0$ des sonst unbegrenzt gedachten Halbleiters geweckte elektrische Feld.

Nachdem die Permeabilität sowohl in dem hier benutzten, fiktiven Substitut des wahren Halbleiters wie innerhalb des Kanales $r < r_0$ definitionsgemäß verschwindet, muß sich überall dort auch die magnetische Induktion annullieren. Daher erweist sich der Vektor E der elektrischen Feldstärke als wirbelfrei, sodaß er als negativer Gradient des skalaren Potentials φ dargestellt werden kann

$$E = -\text{grad } \varphi \quad (8)$$

Durch Δ_0 die sogenannte Dielektrizitätskonstante des leeren Raumes bezeichnend, tritt nun innerhalb des Kanales gemäß (3) neben dem eingepprägten Konvektionsstrom (7) ein Maxwell'scher Verschiebungsstrom der Dichte

$$j_V = \Delta_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = -\Delta_0 \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t}; \quad r < r_0 \quad (9)$$

auf, während sich ebendort die Leitungsstromdichte annulliert

$$j_L = \kappa_0 E = -\kappa_0 \text{grad } \varphi = 0; \quad r < r_0. \quad (10)$$

Im Halbleiter dagegen gesellt sich zu der Verschiebungsstromdichte

$$j_V = \Delta_0 \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = -\Delta_0 \varepsilon \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t}; \quad r > r_0. \quad (11)$$

die Leitungsstromdichte

$$j_L = \kappa E = -k \operatorname{grad} \varphi; \quad r > r_0 \quad (12)$$

Hier wie dort genügt die Gesamtstromdichte

$$j = j_V + j_L, \quad (13)$$

der Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} j = 0. \quad (14)$$

Die Annahme einer je gleichförmigen Leitfähigkeit enthält implizite innerhalb des Kanals einerseits, im Halbleiter andererseits — nicht jedoch an deren gemeinsamer Grenze! — die Voraussetzung der Quasineutralität, an welcher wir weiterhin strikte festhalten. Innerhalb der genannten Gebiete befriedigt daher das Potential φ die LAPLACESche Gleichung

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0; \quad r \leq r_0, \quad (15)$$

so daß die kinematische Forderung (14) sogar für den Verschiebungsstrom und den Leitungsstrom einzeln erfüllt ist.

Wir ergänzen diese allgemeinen Angaben durch die Randbedingungen, welche der Funktion φ aufzuerlegen sind:

1. Die Radialkomponente D_r der elektrischen Induktion

$$D = \Delta_0 \varepsilon_0 E = \Delta_0 \cdot E \quad (16)$$

im Kanal ist der dort linienhaft in der Dichte λ gemäß (6) längs der Achse verteilten Ladung genetisch verknüpft:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\alpha=0}^{2\pi} D_r r d\alpha = -\Delta_0 \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\alpha=0}^{2\pi} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} d\alpha = \lambda(z; t). \quad (17)$$

2. An der Grenze $r = r_0$ bleibt das Potential φ stetig

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \varphi(r_0 - \Delta r) = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \varphi(r_0 + \Delta r); \quad \Delta r > 0. \quad (18)$$

3. Die Radialkomponente j der Gesamtstromdichte durchfließt den Grenzzylinder $r = r_0$ stetig

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \left[-\Delta_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} \right]_{r_0 - \Delta r} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \left[-\Delta_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} - \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right]_{r_0 + \Delta r}. \quad (19)$$

4. Mit wachsendem Radialabstand r des Aufpunktes von der Systemachse soll das Potential gegen Null konvergieren

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi = 0. \quad (20)$$

3. Lösung des Potentialproblem

Aus Symmetriegründen hängt das Potential φ nicht vom Azimut α ab, so daß sich die LAPLACESche Gleichung (15) auf

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0; \quad r \leq r_0 \quad (21)$$

reduziert.

Unter dem Primärpotential $\varphi^{(p)}$ verstehen wir jenes Potential, welches aus φ durch den virtuellen Prozeß

$$\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0 = 1; \quad \kappa \rightarrow \kappa_0 = 0 \quad (24)$$

hervorgeht. Da hierbei der gesamte Raum $r > 0$ frei von Materie wird, verwandeln sich (18) und (19) in Identitäten. Durch die Symbole $H_n^{(1)}$ und $H_n^{(2)}$ beziehentlich die HANKELschen

Zylinderfunktionen n -ter Ordnung der Arten 1 und 2 bezeichnend, genügen wir nun der LAPLACESchen Gleichung (21) unter der Randbedingung (20) nach Wahl einer vorerst willkürlichen Amplitudenfunktion $a = a(l)$ durch das Integral

$$\varphi^{(p)} = \frac{q}{\pi} \int_0^\infty a(l) i H_0^{(1)}(i l r) \cos l (z - v t) dl, \quad (23)$$

dessen Konvergenz ebenso wie jene der später zu entwickelnden Integrale weiterhin vorausgesetzt wird. Die Radialkomponente $E_r^{(p)}$ der elektrischen Primärfeldstärke berechnet sich also zu

$$E_r^{(p)} = -\frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial r} = \frac{q}{\pi} \int_0^\infty a(l) [-H_1^{(1)}(i l r)] \cos l (z - v t) l dl. \quad (24)$$

Mit Hilfe der Formel

$$\lim_{r \rightarrow 0} 2 \pi r [-H_1^{(1)}(i l r)] l = 4 \quad (25)$$

liefert demnach (6) im Verein mit (17) die Relation

$$4 \Delta_0 \cdot a(l) = \frac{\sin \delta l}{\delta l}; \quad a(l) = \frac{1}{4 \Delta_0} \frac{\sin \delta l}{\delta l}, \quad (26)$$

so daß das Primärpotential durch

$$\varphi^{(p)} = \frac{q}{4 \pi \Delta_0} \int_0^\infty \frac{\sin \delta l}{\delta l} i H_0^{(1)}(i l r) \cos l (z - v t) dl \quad (27)$$

dargestellt wird.

Zu unserer ursprünglichen Aufgabe zurückkehrend, ergänzen wir zunächst die HANKELschen Zylinderfunktionen jeweils der n -ten Ordnung durch die BESSELSchen Funktionen

$$J_n = \frac{1}{2} [H_n^{(1)} + H_n^{(2)}] \quad (28)$$

und die NEUMANNschen Funktionen

$$N_n = \frac{1}{2i} [H_n^{(1)} - H_n^{(2)}]. \quad (29)$$

Nun rufen wir vier vorerst unbekannte Amplitudenfunktionen $c(l)$; $s(l)$; $C(l)$; $S(l)$ zu Hilfe, mittels derer wir die gesuchte Lösung in folgender Form ansetzen:

1. Wir begeben uns in das Innere des Kanals $r < r_0$. Da wir dort der Randbedingung (17) bereits durch das Primärpotential genügt haben, kann sich das gesuchte Gesamtpotential φ von $\varphi^{(p)}$ nur um ein Sekundärpotential $\varphi^{(s)}$ unterscheiden, welches in $0 \leq r < r_0$ ausnahmslos stetig ist; da es überdies die LAPLACESche Gleichung (21) befriedigen muß, werden wir somit auf die Integraldarstellung

$$\varphi^{(s)} = \frac{q}{4 \pi \Delta_0} \int_0^\infty J_0(i l r) [c(l) \cos l (z - v t) + s(l) \sin l (z - v t)] dl; \quad r < r_0 \quad (30)$$

geführt. Aus (27) und (30) resultiert die Radialkomponente

$$\begin{aligned} E_r = -\frac{\partial (\varphi^{(p)} + \varphi^{(s)})}{\partial r} = & \frac{q}{4 \pi \Delta_0} \int_0^\infty \frac{\sin \delta l}{\delta l} [-H_1^{(1)}(i l r)] \cos l (z - v t) l dl + \\ & + \frac{q}{4 \pi \Delta_0} \int_0^\infty i J_1(i l r) [c(l) \cos l (z - v t) + s(l) \sin l (z - v t)] l dl \end{aligned} \quad (31)$$

der elektrischen Feldstärke; sie erregt gemäß (9), (10) und (13) die radiale Gesamtstromdichte

$$\begin{aligned} j_r = \Delta_0 \frac{\partial E_r}{\partial t} = \frac{q v}{4 \pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\sin \delta l}{\delta l} [-H_1^{(1)}(i l r)] + i J_1(i l r) c(l) \right\} \sin l (z - v t) l^2 dl + \\ - \frac{q v}{4 \pi} \int_0^{\infty} i J_1(i l r) s(l) \cos l (z - v t) l^2 dl. \end{aligned} \quad (32)$$

2. Wir gehen in den Halbleiter $r > r_0$ über, löschen dort das Primärpotential $\varphi^{(p)}$ und wählen im Hinblick auf (20) die Lösung

$$\varphi = \frac{q}{4 \pi \Delta_0} \int_0^{\infty} i H_0^{(1)}(i l r) [C(l) \cos l (z - v t) + S(l) \sin l (z - v t)] dl; \quad r > r_0 \quad (33)$$

der LAPLACESchen Gleichung (21) als Ansatz des Gesamtpotentials; es erzeugt die Radialkomponente

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{q}{4 \pi \Delta_0} \int_0^{\infty} [-H_1^{(1)}(i l r)] [C(l) \cos l (z - v t) + S(l) \sin l (z - v t)] l dl, \quad (34)$$

welche ihrerseits gemäß (11), (12) und (13) die Radialkomponente

$$\begin{aligned} j_r = \left(\kappa + \Delta_0 \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) E_r = \frac{q}{4 \pi \Delta_0} \int_0^{\infty} [-H_1^{(1)}(i l r)] \{ \kappa S(l) + l \Delta_0 \varepsilon v C(l) \} \sin l (z - v t) l dl + \\ + \frac{q}{4 \pi \Delta_0} \int_0^{\infty} [-H_1^{(1)}(i l r)] \{ \kappa C(l) - l \Delta_0 \varepsilon v S(l) \} \cos l (z - v t) l dl, \end{aligned} \quad (35)$$

der Gesamtstromdichte zur Folge hat.

Um nun die vier unbekannten Amplitudenfunktionen zu bestimmen, bedienen wir uns der Stetigkeitsbedingungen (18) und (19). Das gemeinsame Argument ($i l r_0$) der unterschiedlichen Zylinderfunktionen der Kürze halber unterdrückend, finden wir dann die vier Gleichungen

$$\frac{\sin \delta l}{\delta l} i H_0^{(1)} + J_0 c(l) = i H_0^{(1)} C(l), \quad (36)$$

$$J_0 s(l) = i H_0^{(1)} S(l), \quad (37)$$

$$\frac{\sin \delta l}{\delta l} \{ -H_1^{(1)} + i J_1 c(l) \} = -H_1^{(1)} \left\{ \frac{\kappa}{l \Delta_0 v} S(l) + \varepsilon C(l) \right\}, \quad (38)$$

$$-i J_1 s(l) = -H_1^{(1)} \left\{ \frac{\kappa}{l \Delta_0 v} C(l) - \varepsilon S(l) \right\}. \quad (39)$$

In ihnen dürfen wir den Grenzübergang $\delta \rightarrow 0$ zur Punktladung des bewegten Ions ausführen und erhalten mit

$$D = J_0 H_1^{(1)} \frac{\kappa}{l \Delta_0 v} + \frac{l \Delta_0 v}{\kappa} \left\{ \varepsilon + \frac{i J_1 i H_0^{(1)}}{J_0 H_1^{(1)}} \right\} \{ \varepsilon J_0 H_1^{(1)} - J_1 H_0^{(1)} \} \quad (40)$$

die Angaben

$$S(l) = \frac{J_0 H_1^{(1)} + i H_0^{(1)} i J_1}{D} = -\frac{2}{\pi l r_0} \frac{1}{D}, \quad (41)$$

$$C(l) = S(l) \cdot \frac{l \Delta_0 v}{\kappa} \left\{ \varepsilon + \frac{i J_1 i H_0^{(1)}}{J_0 H_1^{(1)}} \right\}, \quad (42)$$

$$s(l) = S(l) \frac{i H_0^{(1)}}{J_0}, \quad (43)$$

$$c(l) = \frac{i H_0^{(1)}}{J_0} \{ C(l) - 1 \}. \quad (44)$$

Es wird sich zeigen, daß es in den später zu berechnenden Integralen hauptsächlich auf den Bereich

$$0 \leq l \ll \frac{1}{r_0} \quad (45)$$

der Wellenzahl l ankommt. Mit Rücksicht auf das dort jeweils maßgebliche Verhalten der unterschiedlichen Zylinderfunktionen vereinfachen sich daher die vorstehenden Ausdrücke in ausreichender Genauigkeit zu

$$D = H_1^{(1)} \frac{(l \Delta_0 \varepsilon v)^2 + \kappa^2}{l \Delta_0 v \kappa} = -\frac{2}{\pi l r_0} \frac{(l \Delta_0 \varepsilon v)^2 + \kappa^2}{l \Delta_0 v \kappa}, \quad (46)$$

$$S(l) = \frac{l \Delta_0 v \kappa}{(l \Delta_0 \varepsilon v)^2 + \kappa^2}, \quad (47)$$

$$C(l) = \frac{(l \Delta_0 v)^2 \varepsilon}{(l \Delta_0 \varepsilon v)^2 + \kappa^2}, \quad (48)$$

$$s(l) = \frac{l \Delta_0 v \kappa}{(l \Delta_0 \varepsilon v)^2 + \kappa^2} i H_0^{(1)}(i l r_0), \quad (49)$$

$$c(l) = -\frac{\varepsilon (\varepsilon - 1) (l \Delta_0 v)^2 + \kappa^2}{(l \Delta_0 \varepsilon v)^2 + \kappa^2} i H_0^{(1)}(i l r_0). \quad (50)$$

In der gleichen Genauigkeit liefert daher (33) für das Potential im Halbleiter die Integraldarstellung

$$\varphi = \frac{q v}{4 \pi} \int_0^\infty \frac{l \Delta_0 \varepsilon v \cos l (z - v t) + \kappa \sin l (z - v t)}{(l \Delta_0 \varepsilon v)^2 + \kappa^2} i H_0^{(1)}(i l r) l dl, \quad (51)$$

mit welcher wir uns fortan zu beschäftigen haben. Insbesondere ergibt sich im Grenzfalle $\kappa \rightarrow 0$ [Isolator) das relativ zur wandernden Ebene $z = z_j$ elektrostatische Feld der Punktladung q

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \varphi = \frac{q}{4 \pi \Delta_0 \varepsilon} \int_0^\infty \cos l (z - v t) i H_0^{(1)}(i l r) dl = \frac{q}{4 \pi \Delta_0 \varepsilon} \frac{1}{\sqrt{(z - v t)^2 + r^2}}, \quad (52)$$

während der allerdings nur fiktive Grenzfall $\varepsilon \rightarrow 0$ des unpolarisierbaren Leiters in

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi &= \frac{q v}{4 \pi \kappa} \int_0^\infty \sin l (z - v t) i H_0^{(1)}(i l r) l dl \\ &= -\frac{q v}{4 \pi \kappa} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{(z - v t)^2 + r^2}} = \frac{q v}{4 \pi \kappa} \frac{z - v t}{[(z - v t)^2 + r^2]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (53)$$

die Strömung schildert, welche einer mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v längs der z -Achse fortschreitenden Doppelquelle vom Betrage $(q v)$ ihres Momentes entspringt.

4. Entwicklung des Halbleiter-Potentiales in der Umgebung des Kanales

Um die Struktur der Strömung im Halbleiter dem physikalischen Verständnis zu erschließen, kehren wir zu Gl. (51) zurück und versuchen, aus ihr eine explizite Beschreibung des Potentiales φ in der Umgebung des Kanales zu gewinnen. Zu diesem Zwecke begeben wir uns zunächst in die komplexe

$$p = k + i l \quad (54)$$

Ebene und schreiben

$$\varphi = \frac{q v}{4 \pi} [\Phi_I + \Phi_{II}] \quad (55)$$

mit

$$\Phi_I = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{i l (z - v t)}}{l \Delta_0 \varepsilon v + i \kappa} i H_0^{(1)}(i l r) l dl = \frac{1}{2} \int_0^{i \infty} \frac{e^{p (z - v t)}}{p \Delta_0 \varepsilon v - \kappa} H_0^{(1)}(p r) p dp, \quad (56)$$

sowie

$$\Phi_{II} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-i l (z - v t)}}{l \Delta_0 \varepsilon v - i \kappa} i H_0^{(1)}(i l r) l dl = \frac{1}{2} \int_0^{i \infty} \frac{e^{-p (z - v t)}}{p \Delta_0 \varepsilon v + \kappa} H_0^{(1)}(p r) p dp. \quad (57)$$

Von nun an haben wir zwei Fälle analytisch wesentlich verschiedenen Charakters zu behandeln:

1. Es werde

$$(z - vt) > 0 \quad (58)$$

vorausgesetzt, so daß also der Aufpunkt vor der wandernden Ebene $z = z_i$ liegt. Die Relation

$$i H_0^{(1)}(i l r) = -i H_0^{(2)}(-i l r) \quad (59)$$

ausnuttend, erhalten wir dann mittels der konformen Abbildung

$$p' = k' + i l' = -p, \quad (60)$$

in der p' -Ebene für Φ_I die Darstellung

$$\Phi_I = -\frac{1}{2} \int_0^{i\infty} \frac{e^{p(z-vt)}}{p \Delta_0 \varepsilon v - \kappa} H_0^{(2)}(-p r) p dp = \frac{1}{2} \int_0^{-i\infty} \frac{e^{-p'(z-vt)}}{p' \Delta_0 \varepsilon v + \kappa} H_0^{(2)}(p' r) p' dp'. \quad (61)$$

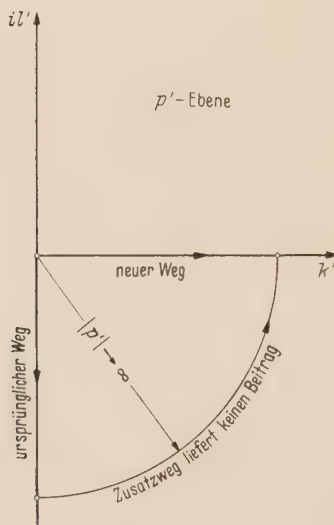


Bild 1. Zur Auswertung des Integrals (61).

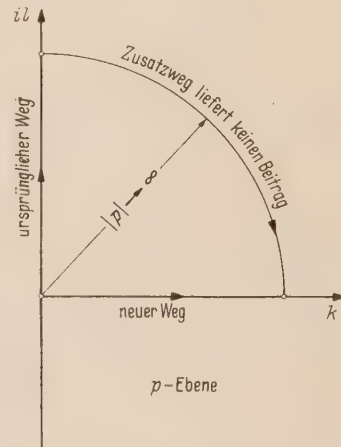


Bild 2. Zur Auswertung des Integrals (63).

Da zufolge (58) der letztangegebene Integrand mit $|p'| \rightarrow \infty$ in der Halbebene $\kappa > 0$ verschwindet, dürfen wir den ursprünglich längs der negativ-imaginären Achse der p' -Ebene verlaufenden Integrationsweg entsprechend Bild 1 in deren positiv-reelle Achse verlegen und finden

$$\Phi_I = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-k'(z-vt)}}{k' \Delta_0 \varepsilon v + \kappa} H_0^{(2)}(k' r) k' dk'. \quad (62)$$

Die nämliche Überlegung liefert in der p -Ebene entsprechend Bild 2 für Φ_{II} die Darstellung

$$\Phi_{II} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-k(z-vt)}}{k \Delta_0 \varepsilon v + \kappa} H_0^{(1)}(k r) k dk. \quad (63)$$

Die in (62) und (63) beziehentlich benutzten Zeichen k' und k der Integrationsvariablen mit dem einheitlichen Symbol γ vertauschend, erhalten wir somit aus (55) im Hinblick auf (28) für das Potential φ des Halbleiters die Darstellung

$$\varphi = \frac{q v}{4 \pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\gamma(z-vt)}}{\gamma \Delta_0 \varepsilon v + \kappa} J_0(\gamma r) \gamma d\gamma; \quad (z - vt) > 0; \quad r > r_0. \quad (64)$$

In ihr ersetzen wir die Strecken $(z - v t)$ und r beziehentlich durch ihre, in der „natürlichen Längeneinheit“

$$M = \frac{A_0 \varepsilon v}{\kappa} \quad (65)$$

gemessenen, dimensionsfreien Werte

$$\zeta = \frac{z - v t}{M} > 0; \quad \varrho = \frac{r}{M} \quad (66)$$

schreiben

$$\gamma M = I \quad (67)$$

und finden

$$\varphi = \frac{q}{4 \pi A_0 \varepsilon M} \cdot \int_0^\infty \frac{e^{-\zeta \Gamma}}{\Gamma + 1} J_0(\varrho \Gamma) \Gamma d\Gamma. \quad (68)$$

Mittels der Potenzreihe

$$J_0(\varrho \Gamma) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\left(\frac{1}{2} \varrho \Gamma\right)^{2\nu}}{(\nu!)^2} \quad (69)$$

der BESSELSchen Funktion nullter Ordnung geht daher (68) in die Summe

$$\varphi = \frac{q}{4 \pi A_0 \varepsilon M} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\nu!)^2} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2\nu} \frac{d^{2\nu}}{d\zeta^{2\nu}} \int_0^\infty \frac{e^{-\zeta \Gamma}}{\Gamma + 1} \Gamma d\Gamma \quad (70)$$

über. Um das hier verbleibende, bestimmte Integral

$$f(\zeta) = \int_0^\infty \frac{e^{-\zeta \Gamma}}{\Gamma + 1} \Gamma d\Gamma, \quad (71)$$

auf tabulierte Funktionen zurückzuführen, substituieren wir anstelle von Γ die Veränderliche

$$u = \zeta (\Gamma + 1). \quad (72)$$

Mittels der in

$$-E i(-\kappa) = \int_{\kappa}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \quad (73)$$

gegebenen Definition des Exponential-Integrals von negativ-reellem Argumente wird dann

$$f(\zeta) = \frac{e^{\zeta}}{\zeta} \left[\int_{\zeta}^{\infty} e^{-u} du - \zeta \int_{\zeta}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \right] = \frac{1 + \zeta e^{\zeta} E i(-\zeta)}{\zeta}, \quad (74)$$

entsprechend Bild 3 a. Aus (73) und (74) entnimmt man die Relationen

$$\frac{df}{d\zeta} = -\frac{1}{\zeta^2} + f(\zeta); \quad \frac{d^2 f}{d\zeta^2} = \frac{2}{\zeta^3} - \frac{1}{\zeta^2} + f(\zeta); \quad \dots \quad (75)$$

durch deren Restitution in (70) die für hinreichend kleine numerische Radialabstände ϱ und für genügend große numerische Abstände $\zeta > 0$ des Aufpunktes von der wandernden Ebene $z = z_j$ brauchbare Entwicklung

$$\varphi = \frac{q}{4 \pi A_0 \varepsilon M} \left[f(\zeta) - \frac{\varrho^2}{4} \left\{ \frac{2}{\zeta^3} - \frac{1}{\zeta^2} + f(\zeta) \right\} + \dots \right] \quad (76)$$

entsteht.

2. Wir gehen zum Falle

$$(z - v t) < 0 \quad (77)$$

über, so daß nunmehr der Aufpunkt hinter der wandernden Ebene $z = z_j$ liegt. Gemäß (56) verschwindet daher jetzt der Integrand von Φ_I für $|p| \rightarrow \infty$ in der Halbebene $k > 0$. Nun konstruieren wir entsprechend Bild 4 um den Pol

$$p_0 = k_0 + i l_0; \quad k_0 = \frac{\kappa}{\Delta_0 \varepsilon v} = \frac{1}{M}; \quad l_0 = 0, \quad (78)$$

als Zentrum den in $l > 0$ gelegenen Halbkreis

$$p = p_0 + \Delta p_0 e^{i\vartheta}; \quad \pi \geq \vartheta \geq 0; \quad \Delta p_0 < k_0 \quad (79)$$

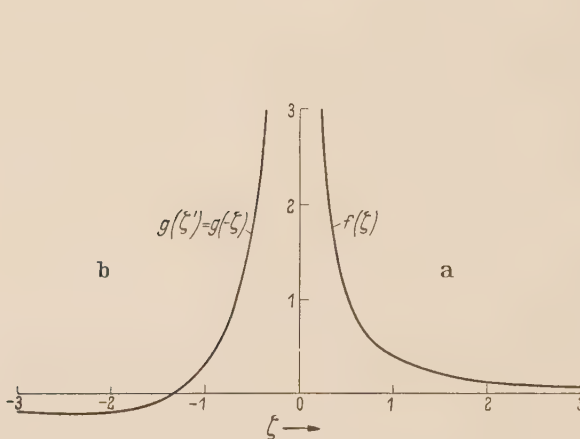


Bild 3. a Die Funktion $f(\xi)$ nach (74); b Die Funktion $g(\xi') = g(-\xi)$ nach (92).

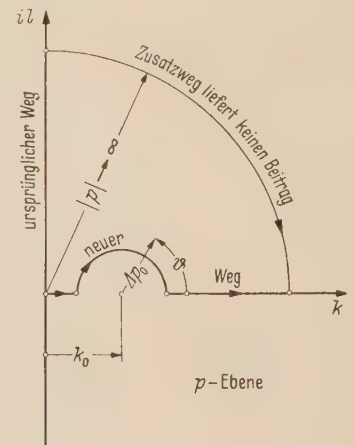


Bild 4. Zur Berechnung des Integrales (80).

und erhalten, unter Berufung auf den CAUCHYSchen Hauptsatz der Funktionentheorie,

$$\begin{aligned} \Phi_I = & \frac{1}{2} \int_0^{k_0 + \Delta p_0} \frac{e^{k(z-vt)}}{k \Delta_0 \varepsilon v - \kappa} H_0^{(1)}(k r) k dk + \\ & + \frac{1}{2} \frac{e^{\xi}}{\Delta_0 \varepsilon v} \int_{-\pi}^0 e^{\Delta p_0 e^{i\vartheta}} H_0^{(1)}(\{k_0 + \Delta p_0 e^{i\vartheta}\} r) (k_0 + \Delta p_0 e^{i\vartheta}) i d\vartheta + \\ & + \frac{1}{2} \int_{k_0 + \Delta p_0}^{\infty} \frac{e^{k(z-vt)}}{k \Delta_0 \varepsilon v - \kappa} H_0^{(1)}(k r) k dk. \end{aligned} \quad (80)$$

Zur Berechnung von Φ_{II} gemäß (57) ziehen wir die konforme Abbildung (60) heran

$$\Phi_{II} = \frac{1}{2} \int_0^{i\infty} \frac{e^{-p(z-vt)}}{p \Delta_0 \varepsilon v + \kappa} H_0^{(1)}(p r) p dp = \frac{1}{2} \int_0^{-i\infty} \frac{e^{p'(z-vt)}}{p' \Delta_0 \varepsilon v - \kappa} H_0^{(2)}(p' r) p' dp'. \quad (81)$$

In der p' -Ebene zeichnen wir entsprechend Bild 5 den Halbkreis

$$p' = p_0 + \Delta p_0 e^{i\vartheta'}; \quad -\pi \leq \vartheta' \leq 0 \quad (82)$$

und erhalten, durch abermalige Anwendung des CAUCHYschen Satzes,

$$\begin{aligned} \Phi_{II} = & \frac{1}{2} \int_0^{k_0 + \Delta p_0} \frac{e^{k'(z-vt)}}{k' \Delta_0 \varepsilon v - \kappa} H_0^{(2)}(k' r) k' dk' + \\ & + \frac{1}{2} \frac{e^{\zeta}}{\Delta_0 \varepsilon v} \int_{-\pi}^0 e^{\Delta p_0 e^{i\vartheta'}} H_0^{(2)}(\{k_0 + \Delta p_0 e^{i\vartheta'}\} r) (k_0 + \Delta p_0 e^{i\vartheta'}) i d\vartheta' + \\ & + \frac{1}{2} \int_{k_0 + \Delta p_0}^{\infty} \frac{e^{k'(z-vt)}}{k' \Delta_0 \varepsilon v - k} H_0^{(2)}(k' r) k' dk'. \end{aligned} \quad (83)$$

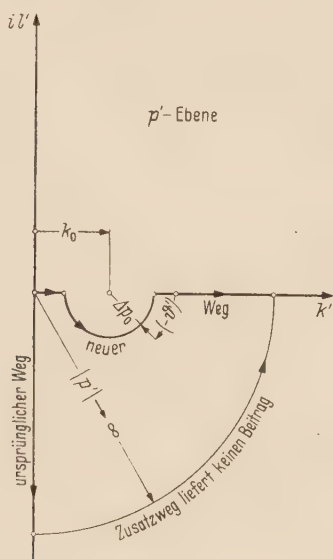


Bild 5. Zur Berechnung des Integrales (83).

Führen wir jetzt den Grenzübergang

$$\Delta p_0 \rightarrow 0 \quad (84)$$

aus, vertauschen, wie oben, k und k' mit dem einheitlichen Symbol γ und bedienen uns der Relation (29), so folgt aus (55), (80) und (83)

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{q v}{4 \pi} \left[\lim_{\Delta p_0 \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{k_0 + \Delta p_0} \frac{e^{\gamma(z-vt)}}{\gamma \Delta_0 \varepsilon v - k} J_0(\gamma r) \gamma d\gamma + \int_{k_0 + \Delta p_0}^{\infty} \frac{e^{\gamma(z-vt)}}{\gamma \Delta_0 \varepsilon v - k} J_0(\gamma r) \gamma d\gamma + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\kappa}{\Delta_0 \varepsilon v} \pi \frac{e^{\frac{\kappa}{\Delta_0 \varepsilon v}(z-vt)}}{\Delta_0 \varepsilon v} N_0\left(\frac{\kappa}{\Delta_0 \varepsilon v} r\right) \right\}; \quad (z-vt) < 0; \quad r > r_0. \right] \end{aligned} \quad (85)$$

Wir setzen hier, mit Benutzung der natürlichen Längeneinheit M nach (65), in Ergänzung von (66)

$$\zeta' = -\frac{z-vt}{M} > 0 \quad (86)$$

und erhalten mit Rücksicht auf (67) und (85) die Darstellung

$$\varphi = \frac{q}{4 \pi \Delta_0 \varepsilon M} \left[\lim_{\Delta p_0 \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{1 + \frac{\Delta \gamma_0}{k_0}} \frac{e^{-\zeta' \Gamma}}{\Gamma - 1} J_0(p \Gamma) \Gamma d\Gamma + \int_{1 + \frac{\Delta p_0}{k_0}}^{\infty} \frac{e^{-\zeta' \Gamma}}{\Gamma - 1} J_0(q \Gamma) \Gamma d\Gamma \right\} + \pi e^{-\zeta'} N_0(q) \right] \quad (87)$$

2*

des Halbleiterpotentials; sie verwandelt sich mit Hilfe der Potenzreihe (69) in

$$\varphi = \frac{q}{4\pi A_0 \varepsilon M} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\nu!)^2} \left(\frac{\varrho}{2} \right)^{2\nu} \lim_{A\varrho_0 \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{1-\frac{A\varrho_0}{k_0}} \frac{e^{-\zeta' \Gamma}}{\Gamma-1} \Gamma d\Gamma + \int_{1-\frac{A\varrho_0}{k_0}}^{\infty} \frac{e^{-\zeta' \Gamma}}{\Gamma-1} \Gamma d\Gamma \right\} + \pi e^{-\zeta'} N_0(\varrho) \right]. \quad (88)$$

Zur Berechnung der Funktion

$$g(\zeta') = \lim_{A\varrho_0 \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{1-\frac{A\varrho_0}{k_0}} \frac{e^{-\zeta' \Gamma}}{\Gamma-1} \Gamma d\Gamma + \int_{1+\frac{A\varrho_0}{k_0}}^{\infty} \frac{e^{-\zeta' \Gamma}}{\Gamma-1} \Gamma d\Gamma \right\} \quad (89)$$

substituieren wir anstelle von Γ die Veränderliche

$$u' = -\zeta' (\Gamma - 1) \quad (90)$$

und erhalten auf Grund der Definition

$$\overline{Ei}(\kappa) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\xi} \frac{e^{+u'}}{u'} du' + \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{+u'}}{u'} du' \right\}; \quad \xi > 0; \quad \kappa > 0 \quad (91)$$

des Exponential-Integrals von positiv-reellem Argument κ aus (89)

$$g(\zeta') = \frac{1 - \zeta' e^{-\zeta'} \overline{Ei}(\zeta')}{\zeta'}, \quad (92)$$

entsprechend Bild 3b. Aus (91) und (92) resultieren die Beziehungen

$$\frac{dg}{d\zeta'} = -\frac{1}{\zeta'^2} - g(\zeta'); \quad \frac{d^2g}{d\zeta'^2} = \frac{2}{\zeta'^3} + \frac{1}{\zeta'^2} + g(\zeta'); \quad \dots \quad (93)$$

durch deren Einsetzen in (88) die für hinreichend kleine numerische Radialabstände ϱ und für genügend große numerische Abstände $\zeta' > 0$ des Aufpunktes von der wandernden Ebene $z = z_j$ brauchbare Entwicklung

$$\varphi = \frac{q}{4\pi A_0 \varepsilon M} \left[g(\zeta') - \frac{\varrho^2}{4} \left\{ \frac{2}{\zeta'^3} + \frac{1}{\zeta'^2} + g(\zeta') \right\} + \dots + \pi e^{-\zeta'} N_0(\varrho) \right] \quad (94)$$

des Halbleiterpotentials entsteht.

5. Das quasistatische Potential

Im Ausdruck (94) des für den Bereich $(z - vt) < 0$ zuständigen Halbleiterpotentials φ erscheint neben einem nach ganzen, positiven Potenzen des radialen, numerischen Aufpunkt-Abstandes ϱ fortschreitenden Anteil die singuläre Komponente

$$\varphi_{st} = \frac{q}{4\pi A_0 \varepsilon M} \cdot \pi \cdot e^{-\zeta'} N_0(\varrho); \quad \zeta' > 0, \quad (95)$$

die schon allein für sich der LAPLACESchen Gleichung genügt. Welche physikalische Bedeutung kommt ihr zu?

Wir behaupten, daß das Potential φ_{st} ungeachtet seiner gemäß (86) impliziten Abhängigkeit von der laufenden Zeit t ein wesentlich elektrostatisches Feld definiert und deshalb als quasistatisches Potential bezeichnet werden darf.

Zum Beweise dieses Satzes bilden wir zunächst die achsial weisende Komponente der quasistatischen elektrischen Feldstärke und erhalten mit Rücksicht auf (86)

$$E_{st,z} = -\frac{\partial \varphi_{st}}{\partial z} = \frac{1}{M} \frac{\partial \varphi_{st}}{\partial \zeta'} = -\frac{q}{4\pi A_0 \varepsilon M^2} \pi e^{-\zeta'} N_0(\varrho). \quad (96)$$

Sie erregt die ebenso gerichteten Komponenten

$$j_{st,z(v)} = A_0 \varepsilon \frac{\partial E_{st,z}}{\partial t} = \frac{A_0 \varepsilon v}{M} \frac{\partial E_{st,z}}{\partial \zeta'} = \kappa \frac{q}{4\pi A_0 \varepsilon M^2} \pi e^{-\zeta'} N_0(\varrho), \quad (97)$$

der Verschiebungsstromdichte und

$$\dot{j}_{st,z(L)} = \kappa E_{st,z} = -\kappa \frac{q}{4\pi \Delta_0 \varepsilon M^2} \pi e^{-\zeta'} N_0(\varrho) \quad (98)$$

der Leitungsstromdichte, welche einander zu verschwindender Achsialkomponente der Gesamtstromdichte ergänzen

$$\dot{j}_{st,z} = \dot{j}_{st,z(V)} + \dot{j}_{st,z(L)} = 0. \quad (99)$$

Ähnlich finden wir aus (95) für die Radialkomponente der quasistatischen elektrischen Feldstärke unter Beachtung der Definition (66) den Ausdruck

$$E_{st,r} = -\frac{\partial \varphi_{st}}{\partial r} = -\frac{1}{M} \frac{\partial \varphi_{st}}{\partial \varrho} = -\frac{q}{4\pi \Delta_0 \varepsilon M^2} \pi e^{-\zeta'} N_1(\varrho) \quad (100)$$

so daß

$$\dot{j}_{st,r(V)} = \Delta_0 \varepsilon \frac{\partial E_{st,r}}{\partial t} = \frac{\Delta_0 \varepsilon v}{M} \frac{\partial E_{st,r}}{\partial \zeta'} = -\kappa \frac{q}{4\pi \Delta_0 \varepsilon M^2} \pi e^{-\zeta'} N_1(\varrho) \quad (101)$$

die von ihr hervorgerufene Komponente der Verschiebungsstromdichte und

$$\dot{j}_{st,r(L)} = \kappa E_{st,r} = \kappa \frac{q}{4\pi \Delta_0 \varepsilon M^2} \pi e^{-\zeta'} N_1(\varrho), \quad (102)$$

jene der Leitungsstromdichte in Richtung wachsenden numerischen Radialabstandes ϱ mißt; wiederum kompensieren einander beide Stromanteile zu verschwindender Radialkomponente der Gesamtstromdichte

$$\dot{j}_{st,r} = \dot{j}_{st,r(V)} + \dot{j}_{st,r(L)} = 0. \quad (103)$$

Im Lichte der Aussagen (99) und (103) offenbart sich also das Feld des Potentials φ_{st} als stromfrei; damit ist der gewünschte Beweis seines quasistatischen Charakters erbracht.

Wir ergänzen und vertiefen diese Überlegungen an Hand der Analyse der flächenhaft längs der Kanalwandung $r = r_0$ ausgebreiteten elektrischen Ladung.

Zunächst richten wir unsere Aufmerksamkeit auf jenen Teil der Kanalwandung, welcher vor dem bewegten Ion liegt. Die dort herrschende radiale Induktion D_r ergibt sich aus (76) zu

$$D_r = -\Delta_0 \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{\Delta_0 \varepsilon}{M} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = \frac{q}{4\pi M^2} \left[\frac{\varrho}{2} \left\{ \frac{2}{\zeta^3} - \frac{1}{\zeta^2} + f(\zeta) \right\} - + \dots \right] \text{ für } \varrho = \varrho_0 = \frac{r_0}{M}. \quad (104)$$

Nun sei die Ionengeschwindigkeit v als so groß vorausgesetzt, daß der numerische Kanalhalbmesser ϱ_0 der Ungleichung

$$\varrho_0 = \frac{r_0}{M} = r_0 \frac{\kappa}{\Delta_0 \varepsilon v} \ll 1 \quad (105)$$

gehört. Bei Ausschluß der nächsten Umgebung des Ions kommt dann gemäß (104) an dem betrachteten Teil der Kanalwandung auch nur eine sehr schwache Radialinduktion zustande, so daß wir die von ihr gebundene Flächenladung vernachlässigen dürfen.

Wenden wir uns jetzt zu dem hinter dem fliegenden Ion gelegenen Teil der Kanalwandung, so haben wir uns an die Potentialdarstellung (94) zu halten und finden für die Radialinduktion die Summe

$$\begin{aligned} D_r = & -\frac{\Delta_0 \varepsilon}{M} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = -\frac{\Delta_0 \varepsilon}{M} \frac{\partial (\varphi - \varphi_{st})}{\partial \varrho} = \frac{\Delta_0 \varepsilon}{M} \frac{\partial \varphi_{st}}{\partial \varrho} = \frac{q}{4\pi M^2} \left[\frac{\varrho}{2} \left\{ \frac{2}{\zeta'^3} + \frac{1}{\zeta'^2} + g(\zeta') \right\} - + \dots \right] + \\ & + \frac{q}{4\pi M^2} \pi e^{-\zeta'} N_1(\varrho); \quad \varrho = \varrho_0 = \frac{r_0}{M}. \end{aligned} \quad (106)$$

Nun gilt für hinreichend kleine ϱ die Entwicklung

$$N_1(\varrho) = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{\varrho} + \dots \quad (107)$$

Bei abermaligem Ausschluß der unmittelbaren Umgebung des Ions fällt daher — unter der Voraussetzung (105) — der absolute Betrag des zweiten Postens der Summe (106) sehr groß gegen jenen des ersten aus, so daß wir (106) hinreichend genau durch

$$D_r \approx \frac{q}{4\pi M^2} \pi e^{-\zeta'} N_1(q) \approx -\frac{q}{2\pi M^2} \frac{e^{-\zeta'}}{q} \text{ für } q = q_0 \quad (108)$$

approximieren dürfen. Demnach enthält jede Längeneinheit der Kanalwandung $\zeta' > 0$ die Ladung

$$\lambda' = 2\pi r_0 D_r = 2\pi M q_0 D_r = -\frac{q}{M} e^{-\zeta'}, \quad (109)$$

so daß auf der gesamten Kanalwandung die Ladung

$$q' = \int_{z=-\infty}^0 \lambda' dz = M \int_0^\infty \lambda' d\zeta' = -q \quad (110)$$

gebunden ist.

Man könnte versucht sein, die Gegenladung ($+q$) in der Ebene $\zeta = \zeta' = 0$ zu suchen, die ja den Existenzbereich des quasistatischen Potentials φ_{st} begrenzt und daher eine Unstetigkeitsfläche eben dieses Potentials definiert. Doch ist diese Meinung durchaus irrig: Ungeachtet der genannten Unstetigkeit des Teilpotentials φ_{st} bleibt das Gesamtpotential φ des Halbleiters auch an jener Ebene stetig! Im Lichte dieser Dialektik mit Einschluß der vorausgesetzten Quasineutralität des gesamten Halbleiters erweist sich also die Ladung ($-q$) der Kanalwandung als eine Art räumlich verteilter [„verschmierter“] Senke für den von der Ionenladung ($+q$) ausgehenden Induktionsfluß; dabei sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1. Solange sich das Ion in einem Isolator befindet [$\kappa \rightarrow 0$; $M \rightarrow \infty$], verschwindet λ' gemäß (109); die Feldlinien verlaufen merklich geradlinig längs der im Ion zentrierten, gegen eine unendlich große Hüllkugel zielenden Strahlen.

2. Bei der Bewegung des Ions im Halbleiter [M endlich] krümmen sich die Feldlinien rückwärts und folgen ihrer Quelle wie der Schweif eines Kometen seinem Kopfe, wobei ihre lineare Senkendichte mit wachsendem Abstand vom Ion exponentiell abfällt. Diese phänomenologische Aussage also beschreibt in überaus anschaulicher Weise die Wirkung des fliegenden Ions auf die seiner Bahn benachbarten, antipolaren Elektrizitätsträger, welche ihm schwarmartig nachlaufen!

3. Falls der Halbleiter zu einem „vollständigen“ Leiter entartet [$\kappa \rightarrow \infty$, $M \rightarrow 0$], konzentriert sich die Gegenladung ($-q$) auf die nächste Umgebung des Ions, während der Leiter feldfrei bleibt; dasselbe tritt, bei endlichem Werte der Leitfähigkeit κ , im Falle verschwindender Ionengeschwindigkeit v ein.

6. Die Bremskraft

Das elektrische Feld des Halbleiters greift am fliegenden Ion mit einer antiparallel der z -Achse wirkenden Bremskraft F an. Welches ist ihre Größe?

Zur Beantwortung dieser fundamentalen Frage bedienen wir uns des Energieprinzipes: Um ungeachtet der Wirkung der Bremskraft die nach Voraussetzung gleichförmige Bewegung des Ions aufrecht zu erhalten, muß man dieses mit der Antriebskraft

$$F' = -F \quad (111)$$

in Richtung der z -Achse vorwärts ziehen. Die hierbei aufgewandte Leistung

$$P = F' v \quad (112)$$

wird durch Vermittlung der elektrischen Strömung innerhalb des Halbleiters in JOULEsche Wärme verwandelt. Durch φ_0 und $j_{r,0}$ beziehentlich die Werte des Halbleiterpotentials und der Radialkomponente der Gesamtstromdichte am Kanalumfang bezeichnend, finden wir nun

$$P = \int_{z=-\infty}^{\infty} \varphi_0 j_{r,0} 2\pi r_0 dz. \quad (113)$$

Zu Gl. (51) zurückkehrend, berechnen wir zunächst die Radialkomponente der elektrischen Feldstärke

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{q v}{4 \pi} \int_0^{\infty} \frac{l \Delta_0 \varepsilon v \cos l(z-vt) + \kappa \sin l(z-vt)}{(l \Delta_0 \varepsilon v)^2 + \kappa^2} H_1^{(1)}(i l r) l^2 dl \quad (114)$$

und aus ihr die Radialkomponente der Gesamtstromdichte

$$j_r = \left(\kappa + \Delta_0 \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) E_r = -\frac{q v}{4 \pi} \int_0^{\infty} \sin l(z-vt) H_1^{(1)}(i l r) l^2 dl. \quad (115)$$

Auf Grund ihrer Antimetrie in bezug auf das Argument $(z-vt)$ geht in das Produktintegral (113) nur der ebenso antimetrische Anteil

$$\varphi^{(a)} = \frac{q v}{4 \pi} \int_0^{\infty} \frac{\kappa \sin l(z-vt)}{(l \Delta_0 \varepsilon v)^2 + \kappa^2} i H_0^{(1)}(i l r) l dl \quad (116)$$

des Potentials φ leistungsbildend ein.

Zur Auswertung jenes Integrales machen wir von folgendem Spezialfall des PARSEVALSchen Theoremes Gebrauch:

Es seien $a_1 = a_1(x)$ und $a_2 = a_2(x)$ zwei je reelle Funktionen von x , welche gleichzeitig die Antimetrie-Eigenschaften

$$a_1(-x) = -a_1(x); \quad a_2(-x) = -a_2(x) \quad (117)$$

aufweisen; daher sind sie der FOURIER-Darstellungen

$$a_1(x) = \int_0^{\infty} \sigma_1(l) \sin lx dl; \quad a_2(x) = \int_0^{\infty} \sigma_2(l) \sin lx dl \quad (118)$$

fähig, deren Spektraldichten $\sigma_1(l)$ und $\sigma_2(l)$ sich aus den Ausgangsfunktionen $a_1(x)$ und $a_2(x)$ nach den Vorschriften

$$\sigma_1(l) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} a_1(x') \sin lx' dx'; \quad \sigma_2(l) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} a_2(x') \sin lx' dx' \quad (119)$$

berechnen. Nun bilden wir — unter der Annahme seiner Existenz — das Integral

$$II = \int_{-\infty}^{\infty} a_1(x) a_2(x) dx = 2 \int_0^{\infty} a_1(x) a_2(x) dx. \quad (120)$$

Ersetzen wir in ihm etwa a_2 durch die aus (118) zu entnehmende FOURIER-Darstellung, so entsteht zunächst

$$II = 2 \int_{x=0}^{\infty} \int_{l=0}^{\infty} a_1(x) \sigma_2(l) \sin lx dl dx \quad (121)$$

und wenn wir hier die Integration nach x ausführen und beachten, daß die Integrationsvariable x' der Spektraldarstellungen (119) ohne Änderung des Ergebnisses in x umbenannt werden darf,

$$II = \pi \int_{l=0}^{\infty} \sigma_1(l) \sigma_2(l) dl. \quad (122)$$

Bei der Anwendung dieses Satzes auf (113) haben wir gemäß (115) und (116)

$$\sigma_1(l) = -\frac{q v}{4 \pi} H_1^{(1)}(i l r_0) l^2; \quad \sigma_2 = \frac{q v}{4 \pi} \frac{\kappa}{(l \Delta_0 \varepsilon v)^2 + \kappa^2} i H_0^{(1)}(i l r_0) l \quad (123)$$

zu setzen und erhalten für die Leistung P den Ausdruck

$$P = 2 \pi r_0 \left(\frac{q v}{4 \pi} \right)^2 \pi \int_0^{\infty} \frac{\kappa}{(l \Delta_0 \varepsilon v)^2 + \kappa^2} i H_0^{(1)}(i l r_0) [-H_1^{(1)}(i l r_0)] l^3 dl. \quad (124)$$

Mittels der Substitution

$$l r_0 = A \quad (125)$$

verwandelt er sich in

$$P = \frac{1}{8} \left(\frac{q}{A_0 \varepsilon r_0} \right)^2 (\kappa r_0) \int_0^\infty \frac{i H_0^{(1)}(i A) [-A H_1^{(1)}(i A)]}{\varrho_0^2 + A^2} A^2 dA. \quad (126)$$

Wir setzen abkürzend

$$\psi(\varrho_0) = \int_0^\infty \frac{i H_0^{(1)}(i A) [-A H_1^{(1)}(i A)]}{\varrho_0^2 + A^2} A^2 dA. \quad (127)$$

Bild 6 zeigt den mittels numerischer Integration ermittelten Verlauf dieser Funktion; für $\varrho_0 \rightarrow 0$ konvergiert sie gegen den Festwert

$$\lim_{\varrho_0 \rightarrow 0} \psi(\varrho_0) = \psi_0 = \int_0^\infty i H_0^{(1)}(i A) [-A H_1^{(1)}(i A)] dA = 0,5, \quad (128)$$

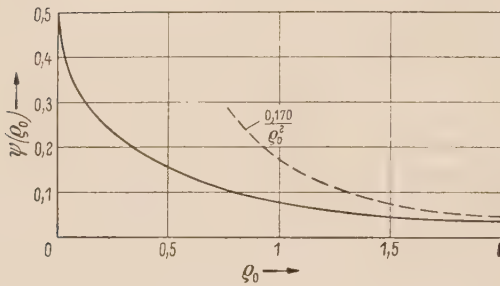


Bild 6. Die Funktion $\psi(\varrho_0)$ nach (127).

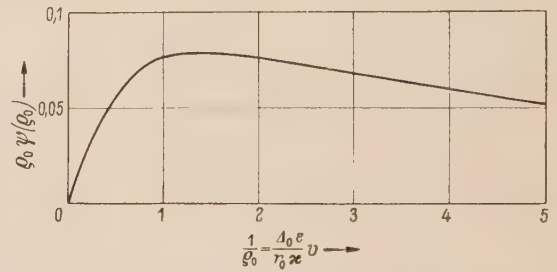


Bild 7. Die [numerische] Bremskraft als Funktion der [numerischen] Ionengeschwindigkeit.

während ihr asymptotisches Verhalten für $\varrho_0 \gg 1$ durch die Näherung

$$\psi(\varrho_0) \approx \frac{1}{\varrho_0^2} \int_0^\infty i H_0^{(1)}(i A) [-A H_1^{(1)}(i A)] A^2 dA = \frac{0,17}{\varrho_0^2} \quad (129)$$

beschrieben wird.

Bringen wir jetzt die Definition des numerischen Kanalhalbmessers p_0 in die Gestalt

$$\frac{1}{v} = \frac{A_0 \varepsilon}{\kappa r_0} \cdot \varrho_0, \quad (130)$$

so liefert (112) im Verein mit (111) für die gesuchte Bremskraft die Darstellung

$$|F| = F' = \frac{1}{8} \frac{q^2}{A_0 \varepsilon r_0^2} \varrho_0 \psi(\varrho_0). \quad (131)$$

Bild 7 veranschaulicht ihren Verlauf in Abhängigkeit vom Kehrwert des numerischen Kanalhalbmessers

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{A_0 \varepsilon}{\kappa r_0} v, \quad (132)$$

welcher im Lichte dieser Gleichung ein dimensionsfreies Maß der Ionengeschwindigkeit liefert. Bei hinreichend kleinen Werten dieser numerischen Geschwindigkeit besteht somit Proportionalität zwischen ihr und der Bremskraft; das Verhältnis

$$\beta = \lim_{v \rightarrow 0} \left| \frac{qv}{F} \right| = 8 \frac{\kappa r_0^3}{|q|} \lim_{\varrho_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{\varrho_0^2 \psi(\varrho_0)} = \frac{8}{0,17} \frac{\kappa r_0^3}{|q|} \quad (133)$$

definiert die Beweglichkeit des Ions, welche hiernach nur mit der Leitfähigkeit κ seines Wirtskörpers, nicht jedoch mit dessen Dielektrizitätskonstante ε verknüpft ist. Dieses Ergebnis stimmt mit jenem der klassischen Korpuskulartheorie der elektrischen Leitung wohl überein: Sei n die Dichte der beweglichen Elektrizitätsträger je Raumeinheit, so errechnet sich die Leitfähigkeit κ aus

$$\kappa = |q| n \beta. \quad (134)$$

Der Vergleich von (133) mit (134) führt also auf die Relation

$$\frac{8}{0,17} r_0^3 = \frac{1}{n}; \quad r_0 = \sqrt[3]{\frac{0,17}{8}} \sqrt[3]{\frac{1}{n}} = 0,277 \sqrt[3]{\frac{1}{n}}, \quad (135)$$

welche anzeigt, daß der Kanalhalbmesser r_0 bis auf einen Zahlenfaktor der Größenordnung 1 dem mittleren Abstand der genannten Elektrizitätsträger gleicht.

Die so einfache Beschreibung der Ionenbewegung mittels einer konstanten Beweglichkeit versagt jedoch, sobald die numerische Geschwindigkeit des fliegenden Ions sich der Größe 1 nähert: Die Bremskraft nimmt dann langsamer als proportional zu, um bei der dem Werte

$$\left(\frac{1}{Q_0}\right)_{kr} = \frac{\Delta_0 \varepsilon}{\kappa r_0} v_{kr} \approx 1,3 \quad (136)$$

entsprechenden kritischen Geschwindigkeit

$$v_{kr} \approx 1,3 \frac{\kappa r_0}{\Delta_0 \varepsilon} \quad (137)$$

den Höchstwert

$$|F|_{max} = \frac{1}{8} \frac{q^2}{\Delta_0 \varepsilon r_0^2} 0,08 = 0,01 \frac{q^2}{\Delta_0 \varepsilon r_0^2} \quad (138)$$

zu erreichen. Falls also die Triebkraft F durch ein am Ion angreifendes elektrisches Triebfeld der Stärke \vec{E} geliefert wird

$$F = q \vec{E}, \quad (139)$$

korrespondiert der Maximalkraft (138) die kritische Feldstärke

$$|\vec{E}_{kr}| = 0,01 \frac{|q|}{\Delta_0 \varepsilon r_0^2}, \quad (140)$$

welche sonach wesentlich unabhängig von der Leitfähigkeit κ ist. Wird die kritische Feldstärke überschritten, so werden die von ihr ergriffenen Ionen hemmungslos beschleunigt: Die kritische Feldstärke leitet den inneren Durchbruch des Halbleiters ein! Dieses wohlbekannte Phänomen der Halbleiterphysik bedarf demnach zu seinem Verständnis nicht der wellenmechanischen Theorie des erzwungenen Überganges der Ionen zwischen zwei durch eine „verbotene Zone“ getrennten Energiebändern, sondern ergibt sich bereits zwanglos aus den folgerichtig angewandten Vorstellungen der klassischen Mechanik und Elektrodynamik; doch beachte man die kritischen Bemerkungen des folgenden Abschnittes.

7. Zahlenbeispiel und Kritik

Wir erläutern die vorstehenden Überlegungen am Beispiel eines Halbleiters der Daten

$$\kappa = 10^2 \frac{1}{\Omega \text{ m}}; \quad \varepsilon = 16; \quad n = 10^{24} \frac{1}{\text{m}^3}$$

während wir dem bewegten Ion die Ladung

$$|q| = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Cb}$$

gleich dem absoluten Betrage der Elektronenladung zuschreiben. Aus (135) ergibt sich dann der Kanalhalbmesser über Erwarten groß

$$r_0 = 0,277 \cdot 10^{-8} \text{ m},$$

während für die kritische Geschwindigkeit gemäß (137) der auffallend niedrige Wert

$$v_{kr} = 1,3 \frac{10^2 \cdot 0,277 \cdot 10^{-8}}{16} 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 = 2,54 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

resultiert. Für die Durchbruchfeldstärke nach (140) finden wir schließlich die Angabe

$$|\vec{E}_{kr}| = 0,01 \frac{1,60 \cdot 10^{-19} \cdot 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}{16 \cdot 0,277^2 \cdot 10^{-16}} = 1,475 \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}},$$

die sowohl mit unseren Vorstellungen wie mit den Beobachtungen einigermaßen verträglich ist.

Der schwache Punkt der mitgeteilten Zahlenrechnung — und damit der gesamten, vorstehend entwickelten Theorie — liegt ersichtlich in dem jeweils einzusetzenden Wert r_0 des Kanalhalbmessers oder, tiefergreifend, in der Konzeption des materiefreien Kanals im sonst den Raum kontinuierlich erfüllenden Halbleiters; in der Tat würde der Grenzübergang zu einem ionenleeren Stoff [$n \rightarrow 0$] gemäß (115) zu dem gewiß absurden Schlusse eines über alle Maße großen Kanalhalbmessers führen, und hieraus sollte nach (140) sogar eine nur infinitesimal schwache Durchschlagsfeldstärke eines solchen Stoffes resultieren!

Die genannten gedanklichen Schwierigkeiten rühren wesentlich von der Wahl unseres kinematischen Modelles her, die indes für die mathematische Durchführung der Aufgabe notwendig ist und nur wenige Varianten gestattet; zu ihr treten die im Verlaufe der Rechnung zusätzlich eingeführten, einschränkenden Annahmen vorwiegend numerischer Natur. Hier also liegen die Ansatzpunkte für eine erneute, verschärfte Behandlung unserer Aufgabe, um die angezeigten Schwächen der phänomenologischen Theorie zu überwinden.

8. Zusammenfassung

Es wird versucht, die „eingeprägte“ Bewegung eines Ions in einem homogenen und isotropen elektrischen Halbleiter gegebener Werte seiner elektrischen Leitfähigkeit κ und seiner Dielektrizitätskonstanten ϵ phänomenologisch zu beschreiben. Durch systematische Vernachlässigung der magnetischen Induktion gelingt es, die Kenntnis des Feldes auf ein elektrisches Skalarpotential φ zurückzuführen, welches überall der LAPLACESchen Gleichung unter einfachen Stetigkeits- und Randbedingungen gehorcht. Die Lösung wird zunächst in Gestalt eines FOURIERSchen Integrales angegeben. Die hieraus gewonnene, explizite Darstellung des Potentials in der Umgebung der Ionenbahn läßt sich anschaulich interpretieren: Das Ion schleppt einen Schwarm antipolarer Elektrizitätsträger nach sich, welche dem „Kopf“ nach Art eines Kometenschweifes folgen. Die hieraus resultierende Bremskraft auf das Ion wird energetisch formuliert und unter Benutzung des Parsevalschen Theorems auf das Produktintegral der spektralen Dichten zurückgeführt, welche die Stromdichte und das Potential des Halbleiters in FOURIERScher Weise schildern. Als Funktion der Ionengeschwindigkeit zeigt die Bremskraft nach anfänglich linearem Anstieg ein Maximum, aus welchem die Existenz einer kritischen Feldstärke erschlossen wird, die den inneren Durchschlag des Halbleiters einleitet. Die Ergebnisse der theoretischen Untersuchung werden an einem Zahlenbeispiel erläutert, dessen Aussagen die Kritik herausfordern; die Ansatzpunkte für eine verschärfte Behandlung des Problems werden angegeben.

Es mag schließlich gesagt werden, daß die vorliegende, in gewissem Sinne sozusagen „altmodische“ Arbeit die modernen, wellenmechanischen Methoden der Halbleiterphysik nicht ersetzen, sondern ergänzen will. In der Tat gelten die hier gefundenen Ergebnisse nicht allein für feste Halbleiter mikrokristallinischer Struktur, sondern schildern in gleicher Weise die Ionenbewegung in quasineutralen Elektrolyten oder im quasineutralen Plasma von elektrischen Gasentladungen.

Für wertvolle Anregungen bei der endgültigen Fassung dieser Arbeit bin ich Herrn Prof. J. FISCHER zu Dank verpflichtet.

Prof. Dr. F. R. OLLENDORFF, Haifa (Israel)
Israel Institute of Technology.

Elektromagnetische Felder mit axialer Symmetrie bei Begrenzungen durch Kegel und Kugel

Herrn Staatssekretär Prof. Dr.-Ing. e. h. Dr. phil. FRIEDRICH GLADENBECK
in Dankbarkeit zu seinem 60. Geburtstag gewidmet

Von

H. BUCHHOLZ, Darmstadt

Mit 6 Textabbildungen

(Eingegangen am 16. August 1958)

Übersicht. In der vorliegenden Arbeit wird zu Anfang das axialsymmetrische Feld eines hypothetischen, freistehenden, magnetischen Stromringes bestimmt, der im Inneren eines von zwei vollkommen leitenden Kegeln und zwei ebensolchen Kugeln begrenzten Raums steht, so daß ein in sich geschlossener Schwingtopf vorliegt. Die geschilderte Art der Anregung des Feldes gewinnt sofort eine physikalische Realität, wenn der magnetische Stromring in eine der Begrenzungsflächen des Raumes hineinrückt. Wird die Intensität des magnetischen Stroms im Ring in Analogie zu dem elektrischen Fall mit U_φ in Volt bezeichnet, so entspricht diese Größe der Spannung zwischen den Kanten des sehr schmalen, ringförmigen Spaltes, der dasselbe äußere Feld erzeugen würde.

Die obige allgemeine Lösung wird dann nach verschiedenen Richtungen hin schrittweise vereinfacht. Unter den dabei vorkommenden, offenen Strahlungsfeldern interessiert insbesondere der schlanke, vollkommen leitende Kegel mit einer an der Spitze aufsitzenden, vollkommen leitenden Kugel, wobei dann entweder die Kugel oder der Kegel den Spalt enthält. Auch für diesen Falle werden die beiden maßgebenden Reihenentwicklungen angegeben.

In einer anschließenden Arbeit wird im letzten Fall dieses Strahlungsfeld auch numerisch berechnet, um so zu einem quantitativen Urteil über den Einfluß der kapazitiven Beschwerung durch die Kugel zu kommen.

1. Einleitung

In zahlreichen Aufsätzen, von denen hier nur einige [1], [2], [3], [4], [5], [6] und [7] erwähnt seien, wird das Strahlungsfeld einer Antenne durch einen ringförmigen Spalt von sehr kleiner Öffnungsbreite erzeugt gedacht. In der Oberfläche des Antennenleiters besteht dann am Ort des Spaltes ein sehr kräftiges elektrisches Feld in Richtung der Mantellinie des Antennenleiters und senkrecht zu den Konturen des Spaltes. In einer heute mehr als fünfzehn Jahre zurückliegenden Arbeit, die in Form einer Broschüre erschien, hat E. METZLER [5] die Eigenschaft von rotationssymmetrischen, elektromagnetischen Strömungsfeldern untersucht, die in der Oberfläche des Antennenleiters durch eine „zonale EMK“ hervorgerufen werden, um eine von dem Autor selbst benutzte Bezeichnungsweise zu gebrauchen. Schließlich hat der Verfasser der vorliegenden Arbeit in zwei teils noch älteren Aufsätzen [6], [7] über axialsymmetrische Strahlungsfelder, die ihre Grenzen an Kegeln, Hohlkegeln oder an Drehparabolen haben, u. a. eine Erregung des Feldes durch koaxiale magnetische Stromringe angenommen. Läßt man einen zunächst freistehenden, zur Achse eines Kegels symmetrischen elektrischen Stromring in die vollkommen leitende Oberfläche eines Kegels oder einer Kugel mit dem Mittelpunkt in der Spitze des Kegels hineinrücken, so wird der Ring kurzgeschlossen, und es hört jede merkliche Strahlung nach außen auf. Handelt es sich aber in dem sonst gleichen Fall um einen magnetischen Stromring, so entsteht ein Feld, das im wesentlichen mit dem elektromagnetischen Feld des schmalen Spaltes übereinstimmt, so daß dieses Feld zum mindesten in seiner Grundstruktur auf diese Weise vielleicht am einfachsten hergeleitet werden kann. Auch die Annahme einer zonalen EMK läuft auf die Anregung durch einen Spalt hinaus.

2.1. Das primäre Strahlungsfeld eines freistehenden magnetischen Stromringes im unbegrenzten Raum mittels der skalaren Hilfsfunktion

Geht die Erregung des Feldes von einem magnetischen Strom mit der Verteilungsdichte $\mathfrak{G}^{(m)}(r', \vartheta', \varphi')$ aus, so berechnet sich bekanntlich (s. z. B. [6]) das von ihm abgestrahlte elektromagnetische Feld über den FITZGERALD-Vektor

$$-i \omega \mu_0 \cdot \mathfrak{D}^{(m)}(r, \vartheta) = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{V'} \mathfrak{G}^{(m)}(r', \vartheta', \varphi') \cdot \frac{e^{+ik_0 R}}{R} \cdot dV' \quad \begin{aligned} [\mathfrak{D}^{(m)}] &= \text{Am} \\ [\mathfrak{G}^{(m)}] &= \text{V/m}^2 \end{aligned} \quad (1)$$

mittels der beiden Formeln:

$$\mathfrak{E}(r, \vartheta, \varphi) = + i \omega \mu_0 \cdot \text{rot } \mathfrak{D}^{(m)}(r, \vartheta), \quad (1a)$$

$$\mathfrak{H}(r, \vartheta, \varphi) = k_0^2 \cdot \mathfrak{D}^{(m)}(r, \vartheta) = \text{rot rot } \mathfrak{D}^{(m)}(r, \vartheta) \quad (1b)$$

und es werden dann in der Tat die beiden Feldgleichungen

$$\text{rot } \mathfrak{E} = + i \omega \mu_0 \cdot \mathfrak{H}, \quad (1\alpha)$$

$$\text{rot } \mathfrak{H} = - i \omega \varepsilon_0 \cdot \mathfrak{E} \quad (1\beta)$$

erfüllt, wenn $\mathfrak{D}^{(m)}$ die partielle und außerhalb des Stromringes homogene Differentialgleichung

$$\text{rot rot } \mathfrak{D}^{(m)}(r, \vartheta) - k_0^2 \cdot \mathfrak{D}^{(m)}(r, \vartheta) = 0 \quad (1A)$$

befriedigt. Aus der Gl. (1A) resultiert auch die doppelte Schreibweise der Gl. (1b). In den Gl. (1) ist bei einem rein sinusförmigen zeitlichen Verlauf gemäß dem Zeitgesetz $\exp(-i\omega t)$

$$+ i \omega \mu_0$$

der induktive Widerstand der freien Raumwelle in Ohm/m,

$$- i \omega \varepsilon_0 + \kappa$$

die überwiegend kapazitive Leitfähigkeit der freien Raumwelle in S/m,

$$k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 = (2\pi/\lambda_0)^2$$

die Wellenzahl in m^{-2} im freien Raum,

$$k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon' = k_0^2 \cdot \varepsilon'/\varepsilon_0$$

die Wellenzahl für $\kappa \neq 0$ mit $\text{Im}(k) > 0$ und $\varepsilon' = \varepsilon_0 \cdot \left(1 + \frac{i\kappa}{\omega \varepsilon_0}\right)$,

$$\lambda_0$$

die freie Raumwellenlänge in m mit $k_0 = 2\pi/\lambda_0$,

$$dV' = dr' \cdot r' \cdot d\vartheta' \cdot r' \sin \vartheta' \cdot d\varphi'$$

ein Volumenelement des von dem magnetischen Stromring erfüllten Raumes in m^3 ,

$$R^2 = r^2 + r'^2 - 2 r r' \cdot \cos \gamma$$

das Quadrat des Abstandes zwischen dem Aufpunkt (r, ϑ, φ) und dem Ort $(r', \vartheta', \varphi')$ von dV' .

Dabei ist in dieser letzten Gleichung wegen

$$\cos \gamma = \cos \vartheta \cdot \cos \vartheta' + \sin \vartheta \cdot \sin \vartheta' \cdot \cos(\varphi' - \varphi) \quad (2)$$

γ die dem Winkel $\varphi - \varphi'$ gegenüberliegende Seite eines sphärischen Dreiecks mit den beiden anderen Seiten ϑ, ϑ' .

Da im vorliegenden Fall eine magnetische Strömung nur längs der Kreislinie (r', ϑ') in immer derselben Größe und Phase vorhanden sein soll, so kann in Gl. (1) geschrieben werden:

$$\mathfrak{E}^{(m)}(r', \vartheta', \varphi') \cdot dV' = U_\varphi \cdot r' \cdot \sin \vartheta' \cdot d\varphi' \cdot \mathfrak{f}_3(\vartheta', \varphi'), \quad (3)$$

$$\lim_{(\Delta \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0)} \left\{ \int_{r'-\Delta}^{r'+\Delta} \int_{\vartheta'-\delta}^{\vartheta'+\delta} |\mathfrak{E}^{(m)}(r', \vartheta', \varphi')| \cdot dr' \cdot r' \cdot d\vartheta' \right\} = U_\varphi \quad [U_\varphi] = V. \quad (3a)$$

Liegt gemäß Bild 1 der Stromring zu dem Kugelkoordinatensystem der r, ϑ, φ (Aufpunkt) und r', ϑ', φ' (Quellpunkt) in der Mantelfläche des Kegels $\vartheta' = \text{const.}$, so daß er gleichzeitig senkrecht steht zur z -Achse, so hängt das Feld allein vom Winkel ϑ ab und nicht von φ , und es ist demnach mit $p = 1, 2, 3$

$$- i \omega \mu_0 \cdot \mathfrak{D}^{(m)}(r, \vartheta) \cdot \mathfrak{f}_p = \frac{U_\varphi}{4\pi} \cdot r' \cdot \sin \vartheta' \cdot \int_0^{2\pi} (\mathfrak{f}_p \cdot \mathfrak{f}_3'(\vartheta', \varphi')) \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \cdot d\varphi'. \quad (4)$$

schon oben bemerkt wurde, nicht der separierbaren Wellengleichung genügt. Diese Forderungen befriedigen aber bekanntlich, wenn es sich um Kugelkoordinaten handelt, die beiden skalaren, von G. MIE eingeführten Hilfsfunktionen, die von ihm selbst mit $u(r, \vartheta, \varphi)$ und $v(r, \vartheta, \varphi)$ bezeichnet worden sind. Da es bei Verwendung dieser Funktionen aus dem angegebenen Grunde leichter möglich ist, andere Partikularlösungen der für u und v verbindlichen Wellengleichung anzugeben, als sie in der Darstellung der primären Erregung bereits vorkommen, so mag auch in unserem Falle der Übergang von $Q_\varphi^{(m)}$ zu den Funktionen u oder v vollzogen werden.

Im axialsymmetrischen Falle stellt sich bei einem magnetischen Stromring der Zusammenhang zwischen den Komponenten der Felder \mathcal{E} , \mathcal{H} und der in diesem Fall zuständigen Funktion u in folgender Weise dar:

$$E_r(r, \vartheta) = r \cdot \left[k^2 \cdot u(r, \vartheta) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \cdot u(r, \vartheta))}{\partial r^2} \right], \quad (7a_1)$$

$$E_\vartheta(r, \vartheta) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \cdot u(r, \vartheta))}{\partial r \cdot \partial \vartheta}, \quad (7b)$$

$$H_\varphi(r, \vartheta) = -i \omega \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial u(r, \vartheta)}{\partial \vartheta}. \quad (7c)$$

Da aber hierin $u(r, \vartheta)$ der Wellengleichung in der besonderen Form

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \cdot u(r, \vartheta))}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \cdot \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + k_0^2 \cdot u(r, \vartheta) = 0 \quad (8)$$

genügt, so läßt sich die Feldkomponente $E_r(r, \vartheta)$ statt durch die Gl. (7a₁) auch durch die Gleichung

$$E_r(r, \vartheta) = -\frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \cdot \frac{\partial u(r, \vartheta)}{\partial \vartheta} \right) \quad (7a_2)$$

berechnen. Der Vergleich von Gl. (7a₂) mit Gl. (6a) führt überdies sofort zu der folgenden Beziehung zwischen den Hilfsfunktionen $Q_\varphi^{(m)}(r, \vartheta)$ und $u(r, \vartheta)$:

$$+ i \omega \mu_0 \cdot Q_\varphi^{(m)}(r, \vartheta) = \frac{\partial u(r, \vartheta)}{\partial \vartheta}. \quad (9)$$

Nun gilt im Hinblick auf Gl. (5) für die Funktion $\exp(+i k_0 R)/k_0 R$:

$$e^{+i k_0 R}/k_0 R = + \frac{\pi i}{2} \sum_{\lambda=0}^{\infty} (2\lambda + 1) \cdot \frac{J_{\lambda + \frac{1}{2}}(k_0 r)}{\sqrt{k_0 r}} \cdot \frac{H_{\lambda + \frac{1}{2}}(k_0 r')}{\sqrt{k_0 r'}} \cdot P_\lambda(\cos \gamma) \quad (r < r'), \quad (10)$$

falls $r' > r$ ist. Im Falle $r' < r$ bekommt die HANKELsche Funktion in Gl. (10) das dann größere Argument $k_0 r$.

Die Integration nach φ' , auf die es gemäß Gl. (5) nur noch ankommt, ist nun leicht ausführbar, denn es gilt ja bekanntlich für die Kugelfunktion erster Art $P_\nu(x)$ die bei beliebigen reellen oder komplexen Werten von ν unendliche Reihe:

$$\begin{aligned} P_\nu(\cos \vartheta \cdot \cos \vartheta' + \sin \vartheta \cdot \sin \vartheta' \cdot \cos(\varphi - \varphi')) \\ = 2 \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(-)^m}{1 + \delta_{0m}} \cdot P_\nu^{-m}(\cos \vartheta) \cdot P_\nu^{+m}(\cos \vartheta') \cdot \cos m(\varphi - \varphi'). \end{aligned} \quad (11a)$$

Für ein positiv ganzzahliges $\nu = n$ bricht die rechtsstehende Reihe hinter dem Glied $\nu = n$ ab.

Führt man unter Benutzung von Gl. (11a) die in Gl. (5) geforderte Integration aus, so erhält man die Beziehung:

$$Q_\varphi^{(m)}(r, \vartheta) = \frac{\pi U_\varphi}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \cdot \frac{r' \cdot \sin \vartheta'}{4} \sum_{\lambda=1}^{\infty} (2\lambda + 1) \cdot \frac{J_{\lambda + \frac{1}{2}}(k_0 r)}{\sqrt{k_0 r}} \cdot \frac{\mathcal{H}_{\lambda + \frac{1}{2}}^{(1)}(k_0 r')}{\sqrt{k_0 r'}} \cdot P_\lambda^{-1}(\cos \vartheta) P_\lambda^1(\cos \vartheta'). \quad (12a)$$

Wegen der Gleichung

$$P_{t-\frac{1}{2}}(x) \cdot (-)^m = \frac{\Gamma\left(t + \frac{1}{2} + m\right)}{\Gamma\left(t + \frac{1}{2} - m\right)} \cdot P_{t-\frac{1}{2}}^{-m}(x) = (1-x^2)^{m/2} \cdot \frac{d^m P_{t-\frac{1}{2}}(x)}{dx^m} \\ (-1 < x < +1; m = 0, 1, 2, \dots) \quad (11b)$$

die bei ganzzahligem m auch für die Kugelfunktion zweiter Art $Q_{t-\frac{1}{2}}(x) \cdot (-)^m$ gilt, berechnet sich dann aus Gl. (12a) für die Hilfsfunktion $u^{(pr)}(r, \vartheta, \varphi)$ selbst, die das primäre Strahlungsfeld beschreibt, die Darstellung:

$$u^{(pr)}(r, \vartheta) = -\pi i \cdot k_0 r' \cdot \sin \vartheta' \cdot U_\varphi / 4 \\ \times \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{2\lambda+1}{\lambda \cdot (\lambda+1)} \cdot \frac{J_{\lambda+\frac{1}{2}}(k_0 r)}{\sqrt{k_0 r}} \cdot \frac{H_{\lambda+\frac{1}{2}}^{(1)}(k_0 r')}{\sqrt{k_0 r'}} \cdot P_\lambda^1(\cos \vartheta') \cdot P_\lambda(\cos \vartheta) \\ (0 < r < r' < \infty). \quad (12b)$$

Geht man in dieser Gleichung in bekannter Weise von der Reihe zum Integral über, so erhält man

$$u^{(pr)}(r, \vartheta) = + \frac{\pi U_\varphi \cdot \sin \vartheta'}{4 \sqrt{r r'}} \int_{\mathfrak{C}} \frac{t}{\cos \pi t} \times \\ \left. \begin{array}{c} (0 \geq r < r' < \infty) \\ \left\{ \begin{array}{l} J_t(k_0 r) \cdot H_t^{(1)}(k_0 r') \\ J_t(k_0 r') \cdot H_t^{(1)}(k_0 r) \end{array} \right\} \\ (0 \geq r' < r < \infty) \end{array} \right\} \cdot \left. \begin{array}{c} (0 \geq \vartheta' < \vartheta \leq \pi) \\ \left\{ \begin{array}{l} P_{t-\frac{1}{2}}^{-1}(\cos \vartheta') \cdot P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \vartheta) \\ (-) \cdot P_{t-\frac{1}{2}}^{(-1)}(-\cos \vartheta') \cdot P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \vartheta) \end{array} \right\} \\ (0 \geq \vartheta < \vartheta' \leq \pi) \end{array} \right\} \cdot dt. \quad (12)$$

In Gl. (12) ist \mathfrak{C} ein auf dem Hinweg dicht unterhalb und auf dem Rückweg dicht oberhalb der reellen Achse der t -Ebene verlaufender Integrationsweg, der von $+\infty$ kommend, den Punkt $t = +3/2$ auf der linken Seite in einem Abstand $|t-3/2| < 1$ umläuft und auf dem oberen Ufer zum Punkt $+\infty$ zurückkehrt. Soll die Gl. (12) für ein r aus dem Bereich $0 \leq r < r'$ gelten, so muß der von der Variablen r abhängende Faktor des Integranden die Funktion $J_t(k_0 r)$ enthalten, weil nur sie für $r = 0$ endlich bleibt, d. h. es gilt in diesem Falle die obere Zeile der ersten geschweiften Klammer von Gl. (12). Bei der geschweiften Klammer mit den Kugelfunktionen im Inneren ist zu beachten, daß für beliebiges komplexes t die Funktion $P_{t-1/2}(\cos \vartheta)$ für $\cos \vartheta \rightarrow -1$ unendlich wird, während sie für ein $\cos \vartheta \rightarrow +1$ endlich bleibt. Dieses verschiedene Verhalten ist die Ursache dafür, daß auch in der zweiten Klammer des Integranden in Gl. (12) nach den angegebenen beiden Fällen unterschieden werden muß. Der Vorzeichenwechsel in den beiden Zeilen dieser zweiten Klammer ist eine Folge der Beziehung:

$$P_\lambda^m(-\cos \vartheta) = (-)^{\lambda+m} \cdot P_\lambda^m(\cos \vartheta) \quad (11c)$$

falls λ, m ganzzahlig sind.

Da $P_0^{-1}(x)$ mit $-1 \geq x \leq +1$ verschwindet, so darf im übrigen der Weg auch bis an den Punkt $t = 0$ als dem äußersten linken Punkt der Schleife herangeführt werden.

2.2. Das vollständige Strahlungsfeld eines freischwebenden, magnetischen Stromringes im Raum zwischen den Kugeln $r = a$ und $r = b > a$ und den Kegeln $\vartheta = \alpha$ und $\vartheta = \beta > \alpha$

Obwohl dieser allgemeinste Fall räumlicher Begrenzung durch Flächen $r = \text{const}$, $\vartheta = \text{const}$ gemäß Bild 2 später nicht ausführlicher behandelt werden wird, möge er jedoch bei der Angabe der Lösung mit berücksichtigt werden, denn er kann ohne zusätzliche Schwierig-

keiten auf dieselbe Weise erledigt werden wie der hauptsächlich interessierende einfachere Fall. Da die Wandungen von Kegel und Kugel als vollkommen leitend angesehen werden

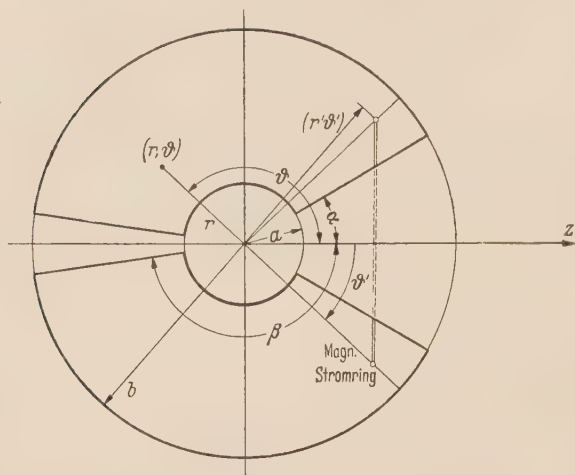


Bild 2. Dieses Bild stellt ein die z-Achse als Symmetrieachse enthaltenden Schnitt durch einen Schwingtopf dar, der nach Abb. 2 von den Kugelflächen $r = a$ und $r = b > a$ und durch die Kegelflächen $\vartheta = \alpha$ und $\vartheta = \beta > \alpha$ begrenzt wird. Das elektromagnetische Feld, das der eingezeichnete, magnetische Stromring im Inneren dieses Schwingtopfes erzeugt, läßt sich durch die Hilfsfunktionen $u(r, \vartheta)$ von Gl. 2 (18') oder 2 (18'') beschreiben.

Im Falle $\alpha = 0$ fehlt der rechte Kegel, im Falle $\beta = \pi$ der linke.

sollen, muß die vollständige Lösung stets die Randbedingung erfüllen, daß in der Mantelfläche der Kegel überall E_r verschwindet und in der Oberfläche der Kugeln dies durchweg bei der Komponente E_ϑ der Fall ist.

Aus Gründen, die erst später ersichtlich werden, ist es jedoch in Rücksicht auf die angestrebte, möglichst allgemeine Lösung zweckmäßig, vorübergehend in dem Raum zwischen den Kugeln $a \leq r \leq b$ und den Kegeln $\alpha \leq \vartheta \leq \beta$ neben dem Verschiebungsstrom auch noch den reinen Leitungsstrom zu berücksichtigen. In den bisherigen Gleichungen braucht dann, sofern es noch nicht geschehen ist, lediglich k_0 durch k und ϵ_0 durch $\epsilon' = \epsilon_0 \left(1 + i \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0}\right)$ ersetzt zu werden. Ein solcher Leitungsstrom könnte etwa dadurch zustandekommen, daß das Dielektrikum in den Schwingtopfen nicht verlustfrei ist.

Um den oben angegebenen Forderungen gerecht zu werden, mögen in Gl. (12) zunächst die erste der beiden geschweiften Klammern durch den Klammerausdruck

$$\left\{ \begin{array}{l} J_i(kr) \cdot H_i^{(1)}(kr') \\ J_i(kr') \cdot H_i^{(1)}(kr) \end{array} \right. \begin{array}{l} (r < r') \\ (r > r') \end{array} + A_1(t) \cdot J_i(kr) + A_2(t) \cdot H_i^{(1)}(kr) \right\} \equiv K_B(t; k; r, r'; a, b) \quad (13)$$

ersetzt werden. Er soll im ganzen Bereich $a \leq r \leq b$ gültig sein. Der Lösungsansatz (15a) darf also sowohl die Funktion $J_i(kr)$ wie die Funktion $H_i(kr)$ enthalten. Im Hinblick auf die Forderung $E_\vartheta(r, \vartheta) = 0$ für alle Winkel ϑ aus dem Bereich $\alpha \leq \vartheta \leq \beta$ und für $r = a$ oder $r = b$ müssen dann wegen Gl. (7a₂) und Gl. (13) die beiden Gleichungen gelten:

$$A_1(t) \cdot \left(\frac{\partial \left(x^{\frac{1}{2}} \cdot J_i(x) \right)}{\partial x} \right)_{x=ak} + A_2(t) \cdot \left(\frac{\partial \left(x^{\frac{1}{2}} \cdot H_i^{(1)}(x) \right)}{\partial x} \right)_{x=ak} = -H_i^{(1)}(r'k) \left(\frac{\partial \left(x^{\frac{1}{2}} \cdot J_i(x) \right)}{\partial x} \right)_{x=ak}, \quad (14a)$$

$$A_1(t) \cdot \left(\frac{\partial \left(x^{\frac{1}{2}} \cdot J_i(x) \right)}{\partial x} \right)_{x=bk} + A_2(t) \cdot \left(\frac{\partial \left(x^{\frac{1}{2}} \cdot H_i^{(1)}(x) \right)}{\partial x} \right)_{x=bk} = -J_i(r'k) \left(\frac{\partial \left(x^{\frac{1}{2}} \cdot H_i^{(1)}(x) \right)}{\partial x} \right)_{x=bk}. \quad (14b)$$

Wird also zur Abkürzung

$$j_i(ak) = \left(\frac{\partial \left(x^{\frac{1}{2}} \cdot J_i(x) \right)}{\partial x} \right)_{x=ak}, \quad h_i^{(1)}(ak) = \left(\frac{\partial \left(x^{\frac{1}{2}} \cdot H_i^{(1)}(x) \right)}{\partial x} \right)_{x=ak} \quad (15a, b)$$

gesetzt, so ist

$$A_1(t) = -h_i^{(1)}(bk) \cdot \begin{vmatrix} j_i(ak) & h_i^{(1)}(ak) \\ J_i(r'k) & H_i^{(1)}(r'k) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} j_i(bk) & h_i^{(1)}(bk) \\ j_i(ak) & h_i^{(1)}(ak) \end{vmatrix}, \quad (15\alpha)$$

$$A_2(t) = +j_i(ak) \cdot \begin{vmatrix} j_i(bk) & h_i^{(1)}(bk) \\ J_i(r'k) & H_i^{(1)}(r'k) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} j_i(bk) & h_i^{(1)}(bk) \\ j_i(ak) & h_i^{(1)}(ak) \end{vmatrix}. \quad (15\beta)$$

Die geschweifte Klammer (13) kann dann jetzt in der Form geschrieben werden:

$$K_B(t; k; r, r'; a, b) = \begin{vmatrix} j_t(a, k) \cdot H_t^{(1)}(r, k) & j_t(a, k) & h_t^{(1)}(a, k) \\ J_t(r, k) \cdot h_t^{(1)}(b, k) & j_t(b, k) & h_t^{(1)}(b, k) \\ J_t(r, k) \cdot H_t^{(1)}(r', k) & J_t(r', k) & H_t^{(1)}(r', k) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} j_t(a, k) & h_t^{(1)}(a, k) \\ j_t(b, k) & h_t^{(1)}(b, k) \end{vmatrix} \cdot (13a)$$

$$(a \geq r < r' \leq b).$$

Für $r > r'$ vertauschen in der letzten Zeile im Element a_{13} der Determinante r und r' ihre Plätze.

Die Zählerdeterminante von Gl. (13a) läßt sich in den beiden Fällen eines $r \geq r'$ aber auch noch in der Form eines Produktes aus zwei zweireihigen Determinanten darstellen. Für $a \leq r < r' \leq b$ muß man zu diesem Zweck die Elemente der dritten Spalte in der dreireihigen Determinante mit $J_t(r, k)$ multiplizieren und sodann von der ersten Spalte abziehen. Man erhält dann

$$K_B(t; k; r, r'; a, b) = \begin{vmatrix} j_t(a, k) & h_t^{(1)}(a, k) \\ J_t(r', k) & H_t^{(1)}(r', k) \end{vmatrix} \cdot \frac{\begin{vmatrix} j_t(b, k) & h_t^{(1)}(b, k) \\ J_t(r, k) & H_t^{(1)}(r, k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} j_t(a, k) & h_t^{(1)}(a, k) \\ j_t(b, k) & h_t^{(1)}(b, k) \end{vmatrix}} (a \geq r < r' \leq b). \quad (13a_1)$$

Für $a \leq r' < r \leq b$ hat man nach der oben angegebenen Änderung des Elementes a_{13} in der Determinante (13a) die Elemente der zweiten Spalte mit $H_t(r, k)$ zu multiplizieren und von der ersten Spalte abzuziehen. Das führt jetzt zu der Beziehung

$$K_B(t; k; r, r'; a, b) = \begin{vmatrix} J_t(r, k) & H_t^{(1)}(r, k) \\ j_t(b, k) & h_t^{(1)}(b, k) \end{vmatrix} \cdot \frac{\begin{vmatrix} J_t(r', k) & H_t^{(1)}(r', k) \\ j_t(a, k) & h_t^{(1)}(a, k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} j_t(a, k) & h_t^{(1)}(a, k) \\ j_t(b, k) & h_t^{(1)}(b, k) \end{vmatrix}} (a \geq r' < r \leq b), \quad (13a_2)$$

Augenscheinlich erfüllen sowohl die Gl. (13a₁) als auch die Gl. (13a₂) die Randbedingungen für $r = a$ oder $r = b$. Ein anderer Vorteil, der für unsere Zwecke durch den Übergang von (13a) zu (13a_{1,2}) erzielt worden ist, besteht darin, daß dadurch die Funktion K_B hinsichtlich t zu einer geraden Funktion gemacht werden konnte, denn es ist bekanntlich [11]:

$$-\frac{\pi i}{2} \cdot \begin{vmatrix} J_\nu(r, z) & J_\nu(r', z) \\ H_\nu^{(1)}(r, z) & H_\nu^{(1)}(r', z) \end{vmatrix} = \int_0^{\ln(r'/r)} \mathfrak{C}0[\nu \varphi] \cdot J_0(z \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cdot \mathfrak{C}0[\varphi]}) \cdot d\varphi. \quad (13\alpha)$$

An der oberen Grenze ist hierin das Argument der rechtsstehenden BESSELSchen Funktion gleich Null, an der unteren Grenze gleich $(r' - r)z$. Mit den modifizierten BESSELSchen Funktionen nimmt die Gl. (13α) die Form an:

$$\begin{vmatrix} I_\nu(r, z) & I_\nu(r', z) \\ K_\nu(r, z) & K_\nu(r', z) \end{vmatrix} = \int_0^{\ln(r'/r)} \mathfrak{C}0[\nu \varphi] \cdot I_0(z \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cdot \mathfrak{C}0[\varphi]}) \cdot d\varphi. \quad (13\beta)$$

Die zweite Klammer des Integranden von (12) werde erweitert zu dem Lösungsansatz:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{l} \text{(\vartheta' < \vartheta)} \\ + P_{t-\frac{1}{2}}^{-1}(\cos \vartheta') \cdot P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \vartheta) \\ \phantom{+ P_{t-\frac{1}{2}}^{-1}(\cos \vartheta') \cdot P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \vartheta)} + B_1(t) \cdot P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \vartheta) + B_2(t) \cdot P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \vartheta) \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{(\vartheta < \vartheta')} \\ (-) P_{t-\frac{1}{2}}^{-1}(-\cos \vartheta') \cdot P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \vartheta) \end{array} \end{array} \right\} = K_P(t; \vartheta, \vartheta'; \alpha, \beta). \quad (16)$$

Auch dieser Ansatz soll im ganzen Bereich $\alpha \geq \vartheta \geq \beta$ gelten, so daß es mithin gerechtfertigt ist, die beiden für beliebiges t voneinander unabhängigen Partikularlösungen $P_{t-\frac{1}{2}}(\pm \cos \vartheta)$ gleichzeitig in den Ansatz aufzunehmen. Da im Kegelmantel für $\vartheta = \alpha$, $\vartheta = \beta$ die Feldkomponente E_r für alle in Frage kommenden Werte von $r > a$ verschwinden muß, so wird gemäß Gl. (7a₁) diesmal $u(r, \alpha)$ oder $u(r, \beta)$ selbst gleich Null. Mithin ist jetzt zu setzen:

$$B_1(t) \cdot P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \alpha) + B_2(t) \cdot P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \alpha) = + P_{t-\frac{1}{2}}^{-1}(-\cos \vartheta') \cdot P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \alpha), \quad (17a)$$

$$B_1(t) \cdot P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \beta) + B_2(t) \cdot P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \beta) = - P_{t-\frac{1}{2}}^{-1}(+\cos \vartheta') \cdot P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \beta). \quad (17b)$$

Daraus folgt durch Auflösen dieses Gleichungssystems

$$B_1(t) = P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \beta) \times \begin{vmatrix} P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \alpha) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \alpha) \\ -P_{t-\frac{1}{2}}^{-1}(\cos \vartheta') & P_{t-\frac{1}{2}}^{-1}(-\cos \vartheta') \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \alpha) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \alpha) \\ P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \beta) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \beta) \end{vmatrix}, \quad (17\alpha)$$

$$B_2(t) = P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \beta) \times \begin{vmatrix} P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \beta) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \beta) \\ -P_{t-\frac{1}{2}}^{-1}(\cos \vartheta') & P_{t-\frac{1}{2}}^{-1}(-\cos \vartheta') \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \alpha) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \alpha) \\ P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \beta) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \beta) \end{vmatrix}. \quad (17\beta)$$

Die obige geschweifte Klammer (16) bekommt damit zunächst das folgende Aussehen:

$$K_P(t; \vartheta, \vartheta'; \alpha, \beta) = \begin{vmatrix} P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \vartheta) \cdot P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \alpha) & P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \alpha) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \alpha) \\ P_{t-\frac{1}{2}}(+\cos \vartheta) \cdot P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \beta) & P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \beta) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \beta) \\ -P_{t-\frac{1}{2}}^{-1}(-\cos \vartheta') \cdot P_{t-\frac{1}{2}}(+\cos \vartheta) & P_{t-\frac{1}{2}}^{-1}(\cos \vartheta') & -P_{t-\frac{1}{2}}^{-1}(-\cos \vartheta') \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \alpha) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \alpha) \\ P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \beta) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \beta) \end{vmatrix} \quad (\alpha \geq \vartheta < \vartheta' \leq \beta). \quad (16a)$$

Für $\alpha \leq \vartheta' < \vartheta \leq \beta$ lautet das Element a_{13} in der Zählerdeterminante von Gl. (16a)

$$+ P_{t-\frac{1}{2}}^{-1}(\cos \vartheta') \cdot P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \vartheta).$$

Auch hier läßt sich wieder die dreireihige Determinante als das Produkt zweier zweireihiger Determinanten darstellen. In der Tat bekommt man im Falle

$$\alpha \geq \vartheta < \vartheta' \leq \beta:$$

$$K_P(t; \vartheta, \vartheta'; \alpha, \beta) = \begin{vmatrix} P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \beta) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \beta) \\ P_{t-\frac{1}{2}}^{-1}(\cos \vartheta') & -P_{t-\frac{1}{2}}^{-1}(-\cos \vartheta') \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \alpha) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \alpha) \\ P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \vartheta) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \vartheta) \\ P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \alpha) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \alpha) \\ P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \beta) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \beta) \end{vmatrix} \quad (16a_1)$$

und im Falle

$$\alpha \geq \vartheta' < \vartheta \leq \beta:$$

$$K(t; \vartheta, \vartheta'; \alpha, \beta) = \begin{vmatrix} P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \vartheta) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \vartheta) \\ P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \beta) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \beta) \end{vmatrix} \cdot \frac{\begin{vmatrix} P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \alpha) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \alpha) \\ P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \vartheta') & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \vartheta') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \alpha) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \alpha) \\ P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \beta) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \beta) \end{vmatrix}}. \quad (16a_2)$$

In Gl. (16a₁) verschwindet die Funktion K_P , wie es sein muß, für $\vartheta = \alpha$ und in Gl. (16a₂) für $\vartheta = \beta$. Auch die Funktion K_P ist wegen $P_{t-\frac{1}{2}} = P_{-t-\frac{1}{2}}$ hinsichtlich t eine in t gerade Funktion.

Mit den neuen, ständigen Abkürzungen $Z_B(t; k; r, r'; a, b)$, $N_B(t; a, b)$ und $Z_P(t - \frac{1}{2}; \vartheta, \vartheta'; \alpha, \beta)$, $N_P(t - \frac{1}{2}; \alpha, \beta)$, deren Bedeutung durch unmittelbaren Vergleich der nachstehenden Beziehung (18) mit den Gln. (13a₁, 13a₂) und Gln. (16a₁, 16a₂) unschwer hervorgeht, lautet nunmehr die formale Lösung der eingangs formulierten Aufgabe:

$$\begin{aligned} u(r, \vartheta) &= + \frac{\pi U_\varphi \cdot \sin \vartheta'}{4 \sqrt{r/r'}} \int_{\mathfrak{C}} \frac{t}{\cos \pi t} \cdot K_B(t; k; r, r'; a, b) \cdot K_P(t; \vartheta, \vartheta'; \alpha, \beta) \cdot dt \\ &\equiv \frac{\pi U_\varphi \cdot \sin \vartheta'}{4 \sqrt{r/r'}} \cdot \int_{\mathfrak{C}} \frac{t}{\cos \pi t} \cdot \frac{Z_B(t, k, r, r'; a, b)}{N_B(t; k; a, b)} \cdot \frac{Z_P(t - \frac{1}{2}; \vartheta, \vartheta'; \alpha, \beta)}{N_P(t - \frac{1}{2}; \alpha, \beta)} \cdot dt. \quad (18) \end{aligned}$$

Hierin ist \mathfrak{C} immer noch der im Anschluß an Gl. (12) beschriebene, nach rechts offene U-förmige Weg von Bild 1, der parallel zur reellen Achse dicht oberhalb und unterhalb von ihr verläuft und dessen linker zurückführender Bogen bis an den Nullpunkt der t -Ebene herangeführt werden kann. Der Integrand des Integrals von Gl. (18) besitzt in seinem ersten Glied $t/\cos(\pi t)$ eine ungerade Funktion. Die anderen beiden Faktoren $K_B(t)$ und $K_P(t)$ sind hingegen, wie wir gesehen haben, gerade Funktionen von t .

Alle Pole, die der Integrand in Gl. (18) zu besitzen scheint, sind jedenfalls einfache Pole. Sie kommen zustande durch die Nullstellen der drei Nenner des Integranden. Diese Nullstellen liegen, falls $\text{Im}(k_0) = 0$ ist, bei

1. $t = 1/2 \pm \lambda$ mit $\lambda = 0, 1, 2 \dots$ im Falle des Nenners $\cos(\pi t)$;
2. $t = \pm \tau_q$ mit reellwertigem τ_q , so daß $N_P(\pm \tau_q - 1/2; \alpha, \beta) = 0$ ist für $q = 1, 2, 3 \dots$;
- 3a. $t = \pm i \sigma_p$ mit reellwertigem σ_p , so daß $N_B(\pm i \sigma_p; k_0; a, b) = 0$ ist mit $p = 1, 2, 3 \dots$;
- 3b. $t = \pm \varrho_p$ mit den endlich vielen Werten $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4 \dots \varrho_m$, so daß $N_B(\varrho_p; k_0; a, b) = 0$ ist, falls die Wellenzahl $k = k_0$ und also reellwertig ist.

Auch ein Teil der Polstellen der Polkette 3 scheint also wie die Pole von 1 und 2 in das von der Wegschleife \mathfrak{C} umrandete Gebiet zu fallen. Aber gerade der Umstand, daß nur ein Teil der Nullstellen von 3 davon betroffen würde, macht diese Annahme von vornherein sehr verdächtig, und es fragt sich, auf welche Weise entschieden werden kann, ob tatsächlich im Hinblick auf die Anwendung des Residuensatzes, wo diese Frage von entscheidender Bedeutung ist, eine solche verschiedenartige Lage der Polketten $i \sigma_p$ und ϱ_p zur Wegschleife \mathfrak{C} zu Recht angenommen werden muß.

Gerade um diese Frage zu entscheiden, ist es zweckmäßig, neben dem besonderen Fall eines reellwertigen k_0 auch den allgemeinen Fall eines komplexwertigen k zu betrachten. In der Tat besteht zwischen den Polketten 1 und 2 einerseits und der unter 3 genannten Polkette der Unterschied, daß die Lage der Nullstellen $1/2 + \lambda$ und τ_q gänzlich unabhängig von der

den Einfluß des Materials wiedergebenden Konstanten k ist, während sie im dritten Fall durchaus davon abhängt. Sollte sich nämlich zeigen, daß bei komplexwertigem k die Nullstellen der Funktion $N_B(t; k; a, b)$ in bezug auf t alle als außerhalb der reellen Achse und damit auch als außerhalb der Wegschleife liegend angenommen werden müssen, so werden diese Nullstellen wegen ihrer stetigen Abhängigkeit vom Argument der beteiligten Funktionen auch bei reellwertigem $k = k_0$ als außerhalb des von der Wegschleife \mathfrak{C} umschlungenen Bereichs liegend anzusehen sein. Eine dementsprechende Wegführung läßt sich nun aber auch bei reellen Werten von k jederzeit erreichen, wenn beide Hälften des Schleifenweges die auf der reellen Achse liegenden Nullstellen 3b oberhalb oder unterhalb von ihnen umlaufen, während die beiden Teile von \mathfrak{C} bei den unter 1 und 2 genannten Nullstellen bei jedem Umlauf um eine Polstelle den betreffenden Pol zwischen sich haben, wie es in Bild 3 angedeutet worden ist.

Die eben beschriebenen Schwierigkeiten in der Wahl des richtigen Verlaufs des Integrationsweges treten nicht auf, wenn, wie in den einfacheren Fällen z. B. der Potentialtheorie, das die Anregung beschreibende Ausgangsintegral, in Gestalt eines gewöhnlichen Linienintegrals darstellbar ist. Wenn es möglich ist, sollte man immer zunächst diese neben der Reihe einfachste Darstellungsform anstreben und mit ihr auch die Anpassung an die Randbedingungen vornehmen. Es ist aber hier nicht möglich, so zu verfahren; es sei denn, man umgeht diese Schwierigkeit durch eine nachträgliche Reihentransformation [10].

Daß die Nullstellen 3, wie bereits erwähnt wurde, bei komplexwertigem k nicht länger auf der reellen oder auf der rein imaginären Achse liegen, läßt sich unmittelbar aus der Gleichung

$$N_B(\varrho_p + \delta; k_0 + i\Delta; a, b) \approx N_B(\varrho_{pi}, k_0) + \delta \cdot (\partial N_B(t; k_0)/\partial t)_{t=\varrho_p} + i\Delta \cdot (\partial N_B(t; x)/\partial x)_{x=k_0}$$

erkennen, die bei genügend kleinen Werten von δ und Δ wegen der stetigen Abhängigkeit der Nullstellen von Argument und Parameter ohne weiteres aus dem Taylorschen Lehrsatz folgt.

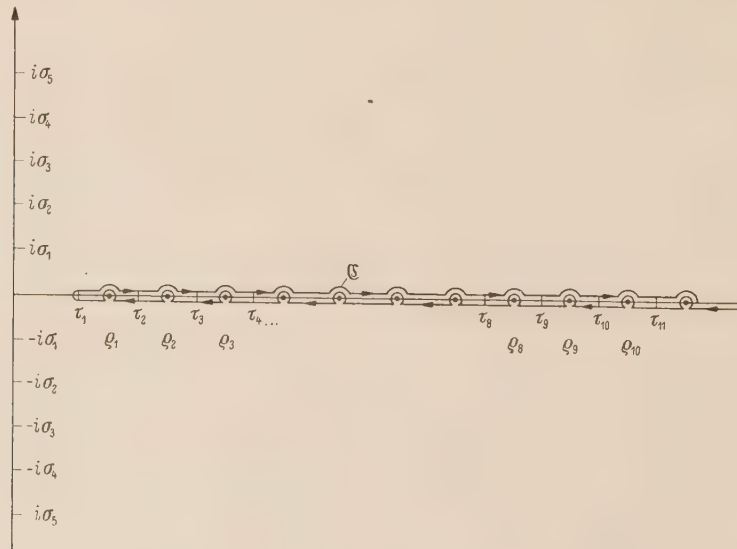


Bild 3. Dieses Bild stellt den erforderlichen Verlauf des Integrationsweges \mathfrak{C} in Gl. 2 (18) dar, wenn die Wellenzahl k in der Funktion K_B reell, d. h. $k = k_0$ ist. Er muß diese besondere Form haben, damit er nur die Nullstellen τ_g umschließt. Wegen weiterer Erläuterungen wird auf den Text im Anschluß an die Gl. 2 (18) verwiesen. Wird der Weg \mathfrak{C} an der imaginären Achse gespiegelt, so läßt er sich zu einem Doppelweg oberhalb und unterhalb der reellen Achse von $-\infty \dots + \infty$ erweitern.

Im übrigen wird wegen der teils reellen, teils rein imaginären Nullstellen, die die Funktion $N_B(t, k_0; a, b)$ besitzt, vor allem auf die Arbeit [10] von G. N. WATSON verwiesen. Wegen anderer hierzu interessierender Formeln vergleiche man die Arbeiten [11], [12] des Verfassers. Aus der schon dort angegebenen Integraldarstellung (13a) geht z. B. sofort hervor, daß für $|(r' - r) \cdot z| \leq j_{01}$ mit $J_0(j_{01}) = 0$ bei reellem z und ν noch keine der Nullstellen ϱ_p besteht.

Aus den Gln. (18) und (16a₁, a₂) ist zu ersehen, daß die Polkette 1 in Wirklichkeit nur vorhanden ist, solange im Integranden für $t = 1/2 + \lambda$ nicht auch die Funktion K_P im Zähler verschwindet. Das ist aber gewiß nicht der Fall, wenn $\alpha = 0$ und $\beta = \pi$ ist, weil für $\cos \vartheta \rightarrow -1$ die Funktion $P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \vartheta) \rightarrow \infty$ strebt. Es sind dann alle Kegelflächen zwischen den beiden Kugeln $r = a$ und $r = b$ verschwunden, und die Funktion

$$K_P(t; \vartheta, \vartheta'; 0, \pi) = P_{t-\frac{1}{2}}^{-1}(\cos \vartheta') \cdot P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \vartheta) \quad (\vartheta' < \vartheta), \quad (19)$$

reduziert sich wieder nach Gl. (16) auf den allein die Anregung beschreibenden, ganz links stehenden Term.

Wenn auch in dieser Arbeit nicht die Absicht besteht, etwa in den Ergebnissen bis zu Zahlenwerten vorzudringen, so hat es aber doch im Hinblick auf die Beziehungen für die Resonanzfrequenzen des Schwingtopfes einiges Interesse, im Fall der allgemeinen Gl. (18) auch die aus der Integraldarstellung der Lösung entfließenden Reihenentwicklungen kennenzulernen. Es empfiehlt sich dann aber, zunächst noch den Integrationsweg von Gl. (18) umzugestalten. Da der Integrand in Gl. (18) auf Grund der früheren Angaben im ganzen ohne das Glied dt eine ungerade Funktion von t ist, so führt der Ersatz von t durch $-t'$ im Integranden zu dem Integrationsweg $-\mathfrak{C}'$ in Bild 3. Auch diesen Weg hat man sich dann als einen Doppelweg zu denken, bei dem zwischen den einzelnen Polen Hin- und Rückweg zusammenfallen, der die auf der reellen Achse liegenden Pole $t = \pm \tau_q$ mit dem Hinweg oberhalb, mit dem Rückweg unterhalb umfährt, während die beiden Hälften dieses Weges die Pole $t = \pm \sigma_p$ entweder beide oberhalb oder beide unterhalb der Pole umlaufen. Die beiden zunächst noch getrennt liegenden Wege \mathfrak{C} und $-\mathfrak{C}'$ dürfen dann sogar, wenn es zweckmäßig erscheint, zu den Wegen $\mathfrak{C}' + \mathfrak{C}''$ zusammengefaßt werden, wie es Bild 4 erkennen läßt.

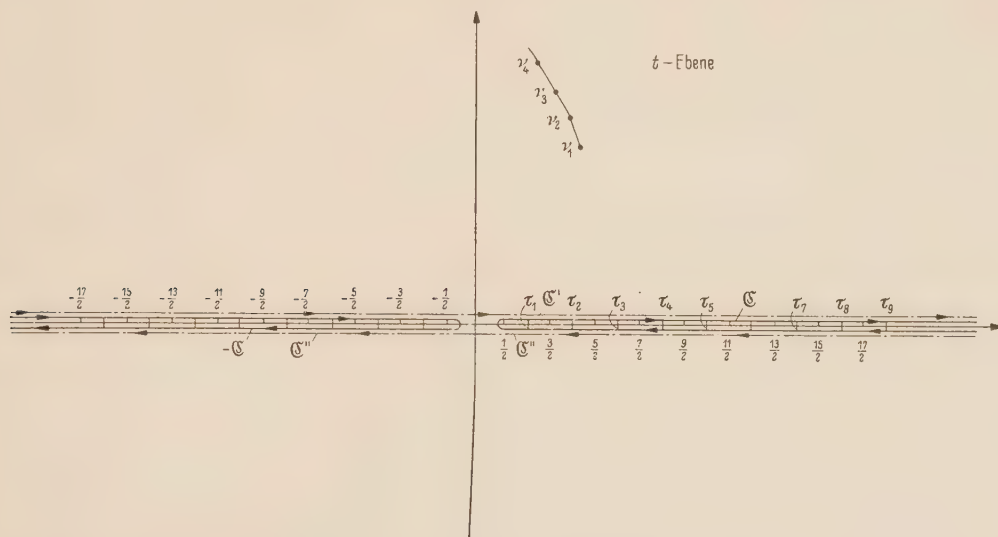


Bild 4. Bei der Abstrahlung in den unbegrenzten Raum hinein reduziert sich die Nennerfunktion K_B auf die Funktion $h_k^{(1)}(a, k)$ von Gl. (23a). Die Nullstellen liegen nunmehr wegen Gl. 2 (27b) im ersten Quadranten der t -Ebene, und der Weg \mathfrak{C} kann jetzt ersetzt werden durch den Weg \mathfrak{C}' oder \mathfrak{C}'' oder $\mathfrak{C}' + \mathfrak{C}''$, wenn notwendig durch Aufnahme des Faktors $1/2$.

Der Wert des Integrals muß dann allerdings gehäuft werden. Die Verschiedenartigkeit der Umläufe um die Polstellen $\pm \tau_q$ und $\pm i \sigma_q$ wurde auf diesem Bild absichtlich nicht hervorgehoben.

Löst man nun in Gl. (18) etwa das Integral der zweiten Zeile zunächst nach den Nullstellen $t = \pm \tau_q$ des Nenners N_P auf, indem man den Doppelweg \mathfrak{C} auf diese zwischen ihm

liegenden Pole der t -Ebene zusammenzieht, so erhält man ohne weiteres die folgende erste Reihendarstellung:

$$u(r, \vartheta) = -2\pi i \cdot \frac{\pi U_\varphi}{4\sqrt{r/r'}} \sin \vartheta' \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\tau_q}{\cos(\pi \tau_q)} \cdot \frac{Z_B(\tau_q; k_0; r, r'; a, b)}{N_B(\tau_q; k_0; a, b)} \cdot \frac{Z_P\left(\tau_q - \frac{1}{2}; \vartheta, \vartheta'; \alpha, \beta\right)}{\left(\partial N_P\left(x - \frac{1}{2}; \alpha, \beta\right) / \partial x\right)_{x=\tau_q}} \quad (18')$$

Eine ganz anders geartete Entwicklung für $u(r, \vartheta)$ entsteht dadurch, daß man sich in Bild 4 die obere und untere Hälfte der beiden Wege \mathfrak{C} und $-\mathfrak{C}$ rechts und links von der imaginären Achse durch Schwenken um die Winkel $\pm \pi/2$ an die imaginäre Achse der t -Ebene herangebogen denkt und danach einen der beiden nunmehr senkrechten und mit entgegengesetzter Richtung durchlaufenen Wege über die imaginäre Achse hinwegzieht und mit dem anderen vereinigt. Das erwähnte Herumschwenken um 90° und das Verschieben der Vertikalwege ist mit der Konvergenz der Integrale vereinbar und ohne Wertänderung möglich. Der Nachweis hierzu gelingt teilweise schon mittels der Formeln 3 (2a, b). Beim Hinüberziehen des linken oder rechten vertikalen Weges über die imaginäre Achse hinweg werden die dort liegenden einfachen Pole $\pm i \cdot \sigma_p$ überquert und beim Hochziehen der Weghälften von der reellen zur imaginären Achse rechts die Pole $+\varrho_p$ und links die Pole $-\varrho_p$, und nach dem Residuensatz ergibt sich auf diese Weise als zweite Entwicklung der Ausdruck:

$$\begin{aligned} u(r, \vartheta) = & +2\pi i \cdot \frac{\pi U_\varphi \cdot \sin \vartheta'}{4\sqrt{r/r'}} \cdot \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varrho_p}{\cos(\pi \varrho_p)} \cdot \frac{Z_B(\varrho_p; k_0; r, r'; a, b)}{(\partial N_B(x; k_0; a, b) / \partial x)_{x=\varrho_p}} \right. \\ & \times \frac{Z_P\left(\varrho_p - \frac{1}{2}; \vartheta, \vartheta'; \alpha, \beta\right)}{N_P\left(\varrho_p - \frac{1}{2}; \alpha, \beta\right)} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2i\sigma_p}{\mathfrak{C} \oint \pi \sigma_p} \cdot \frac{Z_P\left(i\sigma_p - \frac{1}{2}; \vartheta, \vartheta'; \alpha, \beta\right)}{N_P\left(i\sigma_p - \frac{1}{2}; \vartheta, \vartheta'; \alpha, \beta\right)} \\ & \left. \times \frac{Z_B(i\sigma_p; k_0; r, r'; a, b)}{(\partial N_B(x; k_0; a, b) / \partial x)_{x=i\sigma_p}} \right\}, \quad (18'') \end{aligned}$$

denn es sind natürlich die Residuen in den Polen $x = \pm i \sigma_p$ für gleiche Werte von p entgegengesetzt gleich. Wegen der Eigenschaft, gerade zu sein, sind die Funktionen Z_P und N_P für $t = i \sigma_p - \frac{1}{2}$ und für Z_B für $t = i \sigma_p$ reellwertig. Dagegen ist die Funktion $\partial N_B / \partial x$ für $x = i \sigma_p$ rein imaginär.

2.3. Das Strahlungsfeld eines magnetischen Stromringes in den Kugelflächen $a = r$ oder b oder in den Kegelflächen $\vartheta = \alpha$ oder β

Für das Hineinrücken in die Kugeloberfläche $r' = a$ für ein ϑ aus dem Bereich $\alpha < \vartheta < \beta$ ist die Gl. (13a₂) maßgebend. Im Grenzfall ist in dieser Gleichung $r' = a$ zu setzen. Es bekommen dann alle Zylinderfunktionen der maßgebenden Determinante dasselbe Argument. Macht man daher von den Definitionsgleichungen (15a, b) Gebrauch und beachtet eine bekannte Beziehung aus der Theorie der Zylinderfunktionen, so erhält man schließlich den Ausdruck:

$$K_B(t; k; r, a; a, b) = + \frac{2i}{\pi \sqrt{a k}} \cdot \begin{vmatrix} J_t(r k) & H_t^{(1)}(r k) \\ j_t(b k) & h_t^{(1)}(b k) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} j_t(a k) & h_t^{(1)}(a k) \\ j_t(b k) & h_t^{(1)}(b k) \end{vmatrix}. \quad (13\alpha)$$

Erfolgte der Grenzübergang von r' gegen die äußere Kugel mit dem Radius b , so wäre in Gl. (13 α) auf der rechten Seite $(a k)^{1/2}$ durch $(b k)^{1/2}$ zu ersetzen und in der zweiten Zeile der Zählerdeterminante im Argument der Funktionen j_t und $h_t^{(2)}$ der Buchstabe b durch a .

Läßt man andererseits den Stromring $\vartheta = \vartheta'$ in die Kegeloberfläche $\vartheta = \alpha$ übergehen, so hat man in Gl. (16a₂) in der letzten Zählerdeterminante $\vartheta' = \alpha$ zu setzen. Es empfiehlt sich dann, zunächst mittels der ersten der beiden folgenden Beziehungen

$$P_s^\mu(-x) = \cos \pi(s + \mu) \cdot P_s^\mu(x) - 2/\pi \cdot \sin \pi(s + \mu) \cdot Q_s^\mu(x) \quad (0 < x < 1), \quad (20a)$$

$$P_s(x) \cdot \frac{dQ_s(x)}{dx} - Q_s(x) \cdot \frac{dP_s(x)}{dx} = 1/(1 - x^2) \quad (-1 < x < +1), \quad (20b)$$

innerhalb der in Rede stehenden Determinante durchweg zu dem Argument $+\cos \alpha$ überzugehen und gleichzeitig den oberen Parameter -1 vermöge Gl. (11b) in den Parameter $+1$ zu verwandeln. Es kann dann auch die Ableitung der Funktion $P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \alpha)$ selbst eingeführt werden. Im Hinblick auf die Gl. (20b) ergibt sich so die Relation:

$$\begin{vmatrix} P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \alpha) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \alpha) \\ P_{t-\frac{1}{2}}^{-1}(\cos \alpha) & P_{t-\frac{1}{2}}^{-1}(-\cos \alpha) \end{vmatrix} = + \frac{\cos \pi t}{t^2 - 1/4} \cdot \frac{2/\pi}{\sin \alpha}. \quad (21)$$

Im Falle des in der Kegeloberfläche $\vartheta = \alpha$ liegenden Stromringes ist mithin:

$$K_P(t; \vartheta, \alpha; \alpha, \beta) = \frac{2/\pi \cdot \cos \pi t}{(t^2 - 1/4) \cdot \sin \alpha} \times \begin{vmatrix} P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \vartheta) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \vartheta) \\ P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \beta) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \beta) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \alpha) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \alpha) \\ P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \beta) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \beta) \end{vmatrix} \quad (\alpha < \vartheta < \beta). \quad (16\alpha)$$

Liegt der Stromring in der Kegelfläche $\vartheta = \beta$, so muß in der letzten Gleichung statt $\sin \alpha$ im Nenner des Bruches vor der Determinante $\sin \beta$ treten und unter Umkehr des Vorzeichens in der ersten Determinante rechts der Winkel β durch α ersetzt werden. Für $\vartheta = \beta$ verschwindet K_P nach Gl. (16 α) identisch. Für $\vartheta = \alpha$ tritt, wenn die Funktion K_P von Gl. (16 α) unter dem Integralzeichen steht, gleichfalls Verschwinden ein, da dann auf Grund der früheren Ausführungen innerhalb der Wegschleife \mathfrak{C} überhaupt keine Singularitäten liegen.

Ist die kleinere Kugel $r = a$ mit der größeren Kugel $r = b$ nur durch den Kegelmantel $\vartheta = \alpha$ verbunden, so vereinfacht sich die Gl. (16 α) wegen $P_{t-\frac{1}{2}}(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow -1$ weiter zu der Formel:

$$K_P(t; \vartheta, \alpha; \alpha, \pi) = \frac{2/\pi \cdot \cos \pi t}{(t^2 - 1/4) \cdot \sin \alpha} \cdot \frac{P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \vartheta)}{P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \alpha)}. \quad (16\alpha)$$

Bei dem besonderen Aufbau von K_P in den Gln. (16 α) und (16 α_1) fällt in diesen beiden Fällen die polerzeugende Funktion $\cos \pi t$ im Integranden von Gl. (18) heraus.

2.4. Das Strahlungsfeld des auf Kugel oder Kegel aufsitzenden magnetischen Stromrings in den freien Raum hinaus

Wir wenden uns nun dem uns hauptsächlich interessierenden Fall zu, in dem die Ausstrahlung von dem magnetischen Stromring $\vartheta' = \alpha$ aus in den freien Raum hinaus erfolgt. Die diesem Fall entsprechende allgemeine Lösung (18) setzt sich, was den Faktor K_P anbetrifft, aus Gl. (16 α) und betreffs der Funktion K_B aus Gl. (13a₂) zusammen. Es muß nur darin noch der Grenzübergang $b \rightarrow \infty$ vollzogen werden. Unter der vorübergehend gemachten Voraussetzung $\text{Im}(k) > 0$ strebt aber für $b \rightarrow \infty$ die Funktion $h_i^{(1)}(bk) \rightarrow 0$, dagegen die Funktion $j_i(bk) \rightarrow \infty$, und daher ist im Grenzfall:

$$K_B(t; k; r, r'; a, \infty) = \frac{H_i^{(1)}(rk)}{h_i^{(1)}(ak)} \cdot \begin{vmatrix} J_i(r'k) & H_i^{(1)}(r'k) \\ j_i(ak) & h_i^{(1)}(ak) \end{vmatrix} \quad (a < r' < r < \infty). \quad (22)$$

Es versteht sich, daß in Gl. (22) hinterher wieder k rein reell sein darf. Aber auch bei reellem $k = k_0$ strebt K_B in Gl. (22) für $r \rightarrow \infty$ gegen Null.

Ist vorläufig noch $\beta \neq \alpha$ und $\beta \neq \pi$, so ergibt sich damit auf Grund von Gl. (18) die folgende Schlußgleichung:

$$u(r, \vartheta) = + \frac{U_\varphi}{2 \sqrt{r/r'}} \int_{\mathfrak{C}} \frac{J_t(r' k)}{j_t(a k)} \frac{H_t^{(1)}(r' k)}{h_t^{(1)}(a k)} \cdot \frac{\begin{vmatrix} P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \vartheta) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \vartheta) \\ P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \beta) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \beta) \\ P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \alpha) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \alpha) \\ P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \beta) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \beta) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \alpha) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \alpha) \\ P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \beta) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \beta) \end{vmatrix}} \times \\ \times \frac{H_t^{(1)}(r k)}{h_t^{(1)}(a k)} \cdot \frac{t \cdot dt}{t^2 - 1/4} \quad (a < \vartheta < \beta; \quad \vartheta' = \alpha; \quad a < r' < r < \infty). \quad (23)$$

Für $\alpha < r < r' < \infty$ hat man nur nötig, in Gl. (23) unter dem Integral, aber nur dort, r mit r' zu vertauschen.

Denkt man sich in Gl. (23) unter dem Integralzeichen den Quotienten aus den Funktionen $H_t^{(1)}$ und $h_t^{(1)}$ in Zähler und Nenner mit dem Faktor $\exp(t \cdot \pi i/2)$ erweitert, so wird deutlich, daß der Integrand eine in t ungerade Funktion ist. Ersetzt man also im Integranden t durch $-t'$, so lautet der Integrand in t' mit Einschluß des Vorzeichens genau ebenso wie in Gl. (23) der in t , nur verläuft jetzt der Weg \mathfrak{C} wie der in Bild 4 dargestellte Weg $-\mathfrak{C}$. Die beiden Wege \mathfrak{C} , $-\mathfrak{C}$ lassen sich dann wieder wie früher zusammenfassen. Die teils reellen, teils rein imaginären Polstellen $t = \varrho_p$ und $t = \pm i \sigma_p$ der Polkette 3 in dem Text zu Gl. (18) sind jetzt verschwunden. Ihnen entsprechen neuerdings die unendlich vielen komplexen Nullstellen der Funktion $h_t^{(1)}(a k)$ in bezug auf t . Sie haben etwa die in Bild 4 angedeutete Lage in der t -Ebene.

Der Vollständigkeit halber und in Rücksicht auf die spätere Verwendung werde die Darstellung (23) noch ergänzt durch die Gleichung

$$u(r, \vartheta) = \frac{U_\varphi}{2 \sqrt{r/r'}} \cdot \int_{\mathfrak{C}} \frac{J_t(r k)}{j_t(a k)} \frac{H_t^{(1)}(r' k)}{h_t^{(1)}(a k)} \cdot \frac{P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \vartheta)}{P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \alpha)} \cdot \frac{H_t^{(1)}(r k)}{h_t^{(1)}(a k)} \cdot \frac{t \cdot dt}{t^2 - 1/4} \quad (23a) \\ (\alpha \geq \vartheta \leq \pi, \quad a < r' < r < \infty; \quad \vartheta' = \alpha, \quad \beta = \pi)$$

für den besonderen Fall $\beta = \pi$ und durch die Gleichung

$$u(r, \vartheta) = \frac{i \cdot U_\varphi}{\pi \sqrt{r k}} \cdot \int_{\mathfrak{C}} \frac{H_t^{(1)}(r k)}{h_t^{(1)}(a k)} \cdot \frac{P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \vartheta)}{P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \alpha)} \cdot \frac{t \cdot dt}{t^2 - 1/4} \quad (23b) \\ (a \leq \vartheta \leq \pi; \quad a < r < \infty; \quad \vartheta' = \alpha, \quad \beta = \pi; \quad r' = a)$$

für die weitere Spezialisierung von r' in (23a) auf den Wert a . Im Falle der Gl. (23b) liegt also der magnetische Stromring in der Nahtlinie zwischen dem Kegel $\vartheta = \alpha$ und der Kugel $r = a$. Auf diesen Sonderfall weist auch SCHELKUNOFF [13] hin. Auch in (23a, b) kann \mathfrak{C} durch den Weg \mathfrak{C}'' in Bild 3 ersetzt werden.

Rückt andererseits der Stromring in die Kugeloberfläche, so bleibt $\vartheta' \neq \alpha$, während $r' = a$ wird. Mithin ist dann

$$K_B = \frac{2 i}{\pi a k} \cdot H_t^{(1)}(r k) / h_t^{(1)}(a k).$$

Wird noch außerdem $\beta = \pi$ gesetzt, so ist jetzt nach Gl. (18):

$$u(r, \vartheta) = i \cdot \frac{U_\varphi \cdot \sin \vartheta'}{2 k \cdot \sqrt{a r}} \cdot \int_{\mathfrak{C}} \frac{H_t^{(1)}(r k)}{h_t^{(1)}(a k)} \cdot \frac{P_{t-\frac{1}{2}}^{-1}(-\cos \vartheta')}{P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \alpha)} \cdot \frac{\begin{vmatrix} P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \alpha) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \alpha) \\ P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \vartheta) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \vartheta) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_{t-\frac{1}{2}}(\cos \beta) & P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \beta) \end{vmatrix}} \cdot \frac{t \cdot dt}{\cos(\pi t)} \\ (\alpha \leq \vartheta < \vartheta' < \pi; \quad r' = a; \quad \beta = \pi). \quad (23a)$$

Für ein $\alpha \geq \vartheta' < \vartheta < \pi$ steht unter dem Integralzeichen vor der Determinante im Zähler des Bruches $P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \vartheta)$ und in der zweiten Zeile der Determinante in derselben Reihenfolge

$$P_{t-\frac{1}{2}}^{-1}(\cos \vartheta'), \quad -P_{t-\frac{1}{2}}^{-1}(-\cos \vartheta').$$

Macht man hierin wieder $\vartheta' = \alpha$, so erhält man wie vordem die Gl. (23b).

Schrumpft die Kugel mit dem Radius a auf Null zusammen, so gilt nach Gl. (23a) für das für den magnetischen Stromring in der Kugeloberfläche $\vartheta = \alpha$ erzeugte Strahlungsfeld die Darstellung:

$$u(r, \vartheta) = \frac{U_\varphi}{2\sqrt{r/r'}} \int_0^{\infty} J_t(r'k) H_t^{(1)}(rk) \cdot \frac{P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \vartheta)}{P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \alpha)} \cdot \frac{t \cdot dt}{t^2 - 1/4} \quad (23\beta)$$

$$(0 < r' < r < \infty; \quad \alpha \geq \vartheta < \pi; \quad a = 0, \quad b \rightarrow \infty; \quad \beta = \pi).$$

Wir gehen in (23a) vom Integral zur unendlichen Reihe über. Sind dann $t = \tau_q$ wie früher mit $q = 1, 2, 3 \dots$ die unendlich vielen reellen Nullstellen der Gleichung

$$P_{\tau_q}(-\cos \alpha) = 0, \quad (24a)$$

in bezug auf t , so ergibt sich durch Zusammenziehen des Weges auf die positiv reelle Achse die Reihenentwicklung

$$u(r, \vartheta) = -i \cdot \frac{\pi U_\varphi}{\sqrt{r/r'}} \cdot \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\tau_q + 1/2}{\tau_q \cdot (\tau_q + 1)} \cdot \frac{H_{\tau_q + \frac{1}{2}}^{(1)}(rk)}{h_{\tau_q + \frac{1}{2}}^{(1)}(ak)} \cdot \frac{P_{\tau_q}(-\cos \vartheta)}{(\partial P_x(-\cos \alpha)/\partial x)_{x=\tau_q}} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} J_{\tau_q + \frac{1}{2}}(r'k) & H_{\tau_q + \frac{1}{2}}^{(1)}(r'k) \\ J_{\tau_q + \frac{1}{2}}(ak) & h_{\tau_q + \frac{1}{2}}^{(1)}(ak) \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} (\alpha \leq \vartheta \leq \pi) \\ (a < r' < r < \infty) \end{matrix} \quad (24)$$

Für ein $r < r'$ sind in der letzten Gleichung überall r und r' miteinander zu vertauschen. Bei den Winkelbereichen für α , wie sie im Falle des Kegels als Antennenleiter in Frage kommen, kann in Gl. (24a) in erster Näherung die Berechnung der Werte τ_q nach der einfachen Formel

$$\tau_q \approx q + \frac{1}{\pi} \cdot \arctg \left(\frac{\pi}{\ln \left(\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \right)} \right)$$

$$= q + \frac{1}{\pi} \cdot \arctg \left(\frac{\pi/2}{\ln \operatorname{ctg}(\alpha/2)} \right)$$

$$\approx q + 1/(2 \cdot \ln(2/\alpha)) \quad (q = 1, 2, 3 \dots) \quad (24a)$$

erfolgen. Eine zahlenmäßige Übersicht über die Werte von τ_q für $q = 1 \dots 13$ in Abhängigkeit von α im Intervall $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ gibt in anderer Bezeichnung die Abb. 5.

Statt des Weges \mathfrak{C} kann in Gl. (23a) aber auch der Weg \mathfrak{C}' in Bild 4 gewählt werden. Es ist dann ohne Wertänderung möglich, diesen zur reellen Achse parallelen Weg durch einen sehr großen Halbkreis in der oberen t -Halbebene zu einem geschlossenen Weg zu ergänzen. Dieser Weg umschließt jetzt nicht mehr die Polkette τ_q von Gl. (24a), sondern die Polkette ν_n , die durch die komplexen Nullstellen ν_n mit $n = 1, 2, 3 \dots$ der Funktion

$$h_{\nu_n}^{(1)}(ak_0) = \left(\frac{d}{dx} (x^{1/2} \cdot H_{\nu_n}^{(1)}(x)) \right)_{x=ak_0} = 0 \quad (25a)$$

in bezug auf den Parameter t in Gl. (23b) verursacht wird. Auf die Berechnung dieser Nullstellen ν_n , die bereits in einer neueren Arbeit von W. FRANZ und R. GALLE [14] angenähert

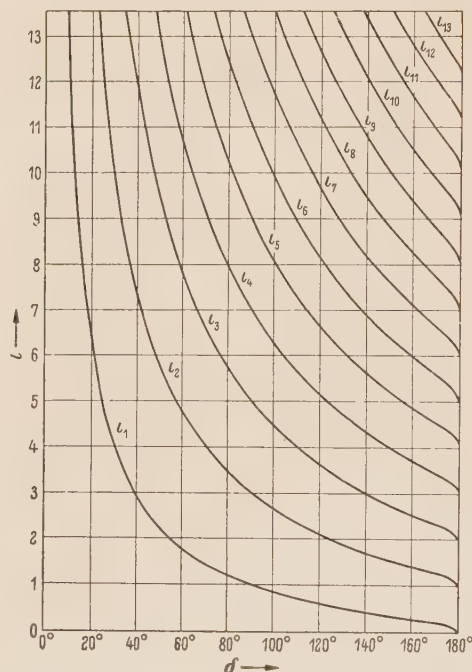


Bild 5. Dieses Bild veranschaulicht die Verteilung der Nullstellen $s = \tau_q$ der Funktion $P_s(\cos \vartheta) = 0$ in bezug auf s bei konstanten Werten von $\cos \vartheta$ innerhalb des Winkelbereiches $0^\circ \leq \vartheta \leq 180^\circ$.

durchgeführt worden ist, wird weiter unten im Zusammenhang mit der Entwicklung anderer hierher gehöriger Formeln eingegangen. Werden die Werte v_n vorläufig als bekannt angesehen, so berechnet sich für die Funktion $u(r, \vartheta)$ noch ohne jede Vernachlässigung die folgende unendliche Reihe:

$$u(r, \vartheta) = \frac{2\pi i \cdot U_\varphi}{\sqrt{r/r'}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{v_n^2 - 1/4} \cdot H_{v_n}^{(1)}\left(\frac{r'}{a} \cdot a k_0\right) \cdot H_{v_n}^{(1)}\left(\frac{r}{a} \cdot a k_0\right) \times \frac{h_{v_n}^{(2)}(a k_0)}{(\partial h_{v_n}^{(1)}(a k_0)/\partial t)_{t=v_n}} \cdot \frac{P_{v_n - \frac{1}{2}}(-\cos \vartheta)}{P_{v_n - \frac{1}{2}}(-\cos \alpha)} \quad (25)$$

denn wegen $2 \cdot j_t(a k_0) = h_t^{(1)}(a k_0) + h_t^{(2)}(a k_0)$ reduziert sich in Rücksicht auf Gl. (25a) $j_{v_n}(a k_0)$ auf die Funktion $h_{v_n}^{(2)}(a k_0)$.

Soll die Aufgabe auch numerisch weiterverfolgt werden können, so braucht man nach Gl. (25) Formeln sowohl für die Nullstellen selbst als auch für die Funktionen $h_t^{(1)}$ und $H_t^{(1)}$, wenn der Parameter $t = v_t$ ist. Mathematisch ist dies wesentlich die gleiche Aufgabe wie die, der sich G. N. WATSON in seiner unten erwähnten Arbeit gegenüber sah. Die hier vorliegende Aufgabe ist nur leichter insofern, als das Argument $a k_0$ im jetzigen Falle rein reell ist. Sie ist aber insofern wieder schwieriger, als der Betrag von $a k_0$ hier in dem wesentlich niedrigeren Zahlenbereich von etwa 50...500 liegt. Die Berechnung der Nullstellen $t = v_m$ von Gl. (25a) muß daher jetzt mit größerer Annäherung erfolgen, als dies in der Arbeit [10] nötig war. Der hier zu stellenden Forderung nach größerer Genauigkeit bei der Berechnung der Nullstellen von $h_t^{(1)}(a k_0)$ entsprechen am ehesten die Rechnungen in der schon oben unter [14] genannten Arbeit. Gemäß den Gl. (9a) und (9b) dieser Arbeit auf Seite 375/376, die sich auf die Funktionen $H_t^{(1)}(x)$ beziehen, berechnet sich für $h_t^{(1)}(x)$ die Näherungsdarstellung:

$$h_v^{(1)}(x) \approx + \frac{12i}{\pi} \cdot \left(\frac{y}{6}\right)^{1/2} \cdot \left\{ A'(q) + \frac{y^2}{12} \cdot \left[\left(\frac{3}{5} - \frac{q^3}{45}\right) \cdot A(q) - \frac{4q}{15} \cdot A'(q) \right] + \frac{y^4}{12} \cdot \left[-\frac{q^4}{27 \cdot 280} \cdot A(q) - \left(\frac{17 \cdot q^2}{3780} + \frac{12 \cdot q^5}{243 \cdot 800}\right) \cdot A'(q) \right] + \frac{y^6}{12} \cdot \left[-\frac{38 \cdot q^2}{81 \cdot 700} + \frac{47 \cdot q^5}{2835 \cdot 21600} + \frac{q^8}{243 \cdot 108000} \right] \cdot A(q) + \left(\frac{1}{27 \cdot 700} - \frac{148 \cdot q^3}{27 \cdot 27 \cdot 700} - \frac{61 \cdot q^6}{27 \cdot 81 \cdot 14000} \right) \cdot A'(q) + \dots \right\}. \quad (26a)$$

In Gl. (26a) stehen die Größen v, x, y, q in dem Zusammenhang:

$$q = (v - x) \cdot y \quad (26\alpha)$$

$$y = e^{-\pi i/3} \cdot (x/6)^{-1/3} \quad (26\beta)$$

und es ist $A(q)$ die AIRYSche Funktion, die entweder durch das AIRYSche Integral

$$A(q) = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i(\tau^3 - q \cdot \tau)] \cdot d\tau = 3^{-1/3} \cdot \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{1}{3} \cdot t^3 - \frac{q}{3^{1/3}} \cdot t\right) \cdot dt \quad (26A)$$

oder durch die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 A(q)}{dq^2} + \frac{q}{3} \cdot A(q) = 0, \quad A(0) = \frac{\pi}{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right), \quad A'(0) = \frac{\pi}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \quad (26B)$$

definiert werden kann. Sie ist mitsamt ihrer ersten Ableitung nach q gemäß den beiden Gleichungen

$$A(q) \equiv \frac{\pi}{3} \cdot (q/3)^{1/2} \cdot [J_{1/3}(2 \cdot (q/3)^{3/2}) + J_{-1/3}(2 \cdot (q/3)^{3/2})] \equiv \frac{\pi}{3^{1/3}} \cdot Ai\left(-\frac{q}{3^{1/3}}\right), \quad (26C_1)$$

$$A'(q) \equiv -\frac{\pi}{9} \cdot q \cdot [J_{2/3}(2 \cdot (q/3)^{3/2}) - J_{-2/3}(2 \cdot (q/3)^{3/2})] \equiv -\frac{\pi}{3^{2/3}} \cdot Ai'\left(-\frac{q}{3^{1/3}}\right) \quad (26C_2)$$

durch die BESSELSchen Funktionen $J_{\pm 1/3}$ und $J_{\pm 2/3}$ darstellbar.

In der der Arbeit [14] entstammenden Gl. (26a) ist $h_v^{(1)}(x)$ in eine nach Potenzen von y^2 oder $x^{-2/3}$ fortschreitende Reihe entwickelt, deren Glieder umso kleiner ausfallen, je größer x^2 ist. Die entsprechenden Reihen für $H_v^{(1)}(x)$ und $H_v^{(1)'}(x)$, auf die oben Bezug genommen wurde und aus denen sie sofort hervorgeht, werden in der oben erwähnten Arbeit aus den SOMMERFELDSchen Integraldarstellungen mittels der Sattelpunktmethode abgeleitet. Nach der Auflösung des Beifaktors im Sattelpunktintegral nach Potenzen der Integrationsvariablen lassen sich die einzelnen, neu entstehenden Integrale alle durch das AIRYSche Integral (26A) für die Funktion $A(q)$ selbst oder deren Ableitungen ausdrücken. Wegen der Gl. (26B) können aber sämtliche höheren Ableitungen von $A(q)$ von der zweiten an durch die nullte und erste Ableitung dargestellt werden. Nach diesen Angaben dürfte der Aufbau des Ausdruckes (26a) im wesentlichen verständlich sein.

Aus der Definitionsgleichung (26C₁) für $A(q)$ ist nun aber sofort zu ersehen, daß die Funktionen $A(q)$ und $A'(q)$ hinsichtlich q unendlich viele reelle Nullstellen haben. Sie mögen mit ξ_n bzw. ξ'_n bezeichnet werden, so daß z. B. die Relation gilt:

$$A'(\xi'_n) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (27a)$$

Diese Nullstellen sind, was die ξ'_n anbetrifft, in dem bekannten Buch [15] von G. N. WATSON auf S. 751 zu finden. Von den Nullstellen der Funktion $A'(q)$, auf die es hier ankommt, sind die ersten zehn, da sie in der Literatur gar nicht so leicht zu finden sind, in Zahlentafel 1 zugleich mit den Werten der Funktion $A(\xi'_n)$ auf 6 Dezimalstellen genau angeführt. Sie wurden nach den Angaben im Tafelwerk [17] berechnet, das u. a. die auf 8 Dezimalstellen genau berechneten Werte der ersten 50 Nullstellen der beiden AIRYSchen Funktionen A_i und A_i' der Gl. (26C₁, C₂) enthält.

Zahlentafel 1. Die ersten 10 Nullstellen $q = \xi'_n$ der Funktion $A'(q)$, Gl. (26A).

q	ξ'_n	$A(\xi'_n)$
1	+ 1,469 353.7	+ 1,166 798.8
2	+ 4,684 711.6	— 0,912 724.1
3	+ 6,951 786.0	+ 0,828 623.7
4	+ 8,889 027.4	— 0,779 616.1
5	10,632 519.5	+ 0,745 620.7
6	12,242 516.3	— 0,719 862.7
7	13,752 497.3	+ 0,699 269.6
8	15,183 513.7	— 0,682 198.8
9	16,549 895.5	+ 0,667 674.0
10	17,861 955.7	— 0,655 069.5

Ist x sehr groß, so liegt nach Gl. (26 α , β) bereits in $q = \xi'_n$ selbst, und somit ausgedrückt in v , in dem Wert

$$v_n = x + \xi'_n \cdot e^{+\pi i/3} \cdot (x/6)^{1/3}$$

eine erste Näherung für die Nullstellen $v = v_n$ der Funktion $h_t^{(1)}(x)$ in bezug auf t bei festen Werten von x vor. Man kann diese Formel für die Nullstellen von $h_t^{(1)}(x)$ aber offenbar noch verbessern, indem man für v eine Potenzreihe in y^2 oder $x^{-3/2}$ mit unbekannten Koeffizienten ansetzt. Diese zunächst noch unbekannten Koeffizienten treten dann auch in den einzelnen Potenzen von q innerhalb der Gl. (26a) sowie in den Funktionen $A(q)$ und $A'(q)$ auf. Geht man mit den daraus herstellbaren TAYLORSchen Entwicklungen um die Stellen ξ'_n herum in Gl. (26a) ein, so lassen sich dann die Koeffizienten in der angesetzten Reihenentwicklung bestimmen, und man findet schließlich die Formel:

$$v_n = x + e^{+\pi i/3} \cdot (x/6)^{1/3} \cdot \xi'_n + \frac{\exp(-\pi i/3)}{(x/6)^{1/3}} \cdot \frac{1}{20} \left(3 - \frac{\xi_n'^2}{9} \right) + \frac{3}{800 \cdot (x/6)^{3/3}} \cdot \left(\frac{3}{\xi_n'^3} - \frac{4}{9} + \frac{4\xi_n'^3}{189} \right) + \frac{\exp(+\pi i/3)}{(x/6)^{5/3}} \cdot \frac{1}{16000} \left(\frac{27}{\xi_n'^5} - \frac{6}{\xi_n'^2} + \frac{788}{567} \xi'_n - \frac{562}{567 \cdot 27} \xi_n'^4 \right). \quad (27b)$$

Auch sie ist bereits in der oben erwähnten Arbeit [14] als Gl. (14) aufgeführt. Da x reell ist so liegen mithin die Nullstellen v_n in der oberen t -Halbebene.

Auf welche Feldkomponenten es nun auch immer späterhin ankommen möge, nach Gl. (25) sind außer den Werten von v_n auch noch Formeln für die Funktionen $h_v^{(2)}(a k_0)$ und $\partial h_v^{(1)}(a k_0)/\partial t$ an den Stellen $t = v_n$ erforderlich.

Die Berechnung der zuletzt erwähnten Größe erfordert zunächst eine Differentiation des Ausdrucks (26a) für $h_v^{(1)}(x)$ nach v bei festem x und damit auch bei festem y . Nach Gl. (26a) ist aber offenbar $\partial/\partial v = y \cdot \partial/\partial q$, so daß es mithin nicht schwierig ist, die Differentiation auszuführen. Da hinterher der Wert der Ableitung nur an der Stelle $v = v_n$, d. h. für ein $q = \xi_n'$ benötigt wird, verschwinden wegen (27a) in dem differenzierten Ausdruck alle Glieder mit $A'(\xi_n')$ als Faktor, und man bekommt zwischendurch zunächst die Formel:

$$(\partial h_v^{(1)}(x)/\partial v)_{v=v_n} = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{y^{3/2}}{6^{1/2}} \cdot \xi_n' \cdot \left\{ 1 - \frac{\xi_n'}{180} \cdot y^2 - \frac{1}{4} \xi_n'^2 \cdot y^4 \cdot \left(\frac{11}{11340} + \frac{\xi_n'^3}{48600} \right) - \frac{1}{4} y^6 \cdot \left(-\frac{11}{8100} + \frac{137}{168 \cdot 8100} \cdot \xi_n'^3 + \frac{89}{6561 \cdot 14000} \cdot \xi_n'^6 \right) \cdot \dots \right\} \cdot A(\xi_n'). \quad (28a)$$

Beachtet man hierin noch den Zusammenhang zwischen y und x auf Grund der Gl. (26b), so ergibt sich endgültig für die Größe $\partial h_v^{(1)}/\partial t$ im Nenner von Gl. (25) die Näherungsdarstellung:

$$(\partial h_v^{(1)}(x)/\partial v)_{v=v_n} = -\frac{4}{\pi} \frac{\xi_n'}{\sqrt{x}} \cdot A(\xi_n') \cdot \left\{ 1 - \xi_n' \cdot \frac{(6/x)^{2/3}}{180} \cdot e^{-2\pi i/3} + \xi_n'^2 \cdot \frac{(6/x)^{4/3} \cdot e^{-\pi i/3}}{3240} \cdot \left(\frac{11}{14} + \frac{\xi_n'^3}{60} \right) - \frac{(6/x)^{6/3}}{3600} \cdot \left(-\frac{11}{9} + \frac{137}{1512} \cdot \xi_n'^3 + \frac{89}{102060} \cdot \xi_n'^6 \right) \cdot \dots \right\}. \quad (28)$$

Die andere, noch fehlende Formel für $h_{v_n}^{(2)}(a k_0)$ läßt sich etwa auf Grund der Identität

$$h_{v_n}^{(2)}(a k_0) = \overline{h_{\bar{v}_n}^{(1)}(a k_0)} \quad \text{Im}(k_0) = 0 \quad (29a)$$

berechnen. Darin bezeichnet der über v_n und der über dem ganzen rechtsstehenden Ausdruck gezogene horizontale Strich, daß einmal v_n durch \bar{v}_n zu ersetzen und danach für die ganze, darunterstehende Größe der konjugiert komplexe Wert zu nehmen ist.

Um hierin $h_{v_n}^{(1)}(a k_0)$ zu berechnen, kann die Gl. (26a) herangezogen werden, in der dann

$$q = y \cdot (\bar{v}_n - x), \quad (30a)$$

$$y = e^{-\pi i/3} \cdot (x/6)^{-1/3}, \quad (30b)$$

$$x = a k_0 \quad (30c)$$

zu setzen ist. Entwickelt man daraufhin mit der angegebenen neuen Bedeutung von q in Gl. (26a) die Funktionen $A(q)$ und $A'(q)$ nach Potenzen von y und faßt alle Glieder mit gleich hohen Potenzen von y^2 zusammen, so ergibt sich nach längerer und ziemlich mühseliger Rechnung, die aber wegen ihrer zweifelfreien Durchführbarkeit hier nicht wiedergegeben zu werden braucht, unter Achtgabe auf Gl. (29a) die folgende Schlußformel¹:

$$\begin{aligned} h_{v_n}^{(2)}(a k_0) / \left(\frac{12}{\pi} \cdot \frac{y^{1/2}}{6^{1/2}} \cdot e^{-\pi i/6} \right) &= A'(\xi_n' \cdot e^{+2\pi i/3}) - y^2 \cdot \frac{\xi_n'}{45} \cdot e^{+2\pi i/3} \cdot A'(\xi_n' \cdot e^{+2\pi i/3}) \\ &+ \frac{y^4}{2400} \cdot e^{+4\pi i/3} \cdot \left(\frac{1}{\xi_n'} - \frac{80}{63} \cdot \xi_n'^2 \right) \cdot A'(\xi_n' \cdot e^{+2\pi i/3}) \\ &- \frac{y^6}{12000} \cdot e^{+6\pi i/3} \cdot \left[\frac{3}{2 \xi_n'^3} + \frac{47}{27} + \frac{122}{27 \cdot 63} \xi_n'^3 - \frac{89}{27 \cdot 42} \xi_n'^6 \right] \\ &\times A'(\xi_n' \cdot e^{+2\pi i/3}) \end{aligned} \quad (30)$$

Hierin hat y wiederum die Bedeutung von Gl. (30b).

¹ Für die Vornahme der sehr zeitraubenden und mühseligen Kontrollrechnungen an den Gln. (28) und (30) möchte ich gleich an dieser Stelle Herrn Dipl.-Ing. CONSTANTIN meinen besten Dank sagen.

3.1. Die Beziehungen für die Feldkomponenten E_r , E_ϑ , und H_φ , bei Einspeisung durch einen zonalen Spalt im Kegelmantel. Das Integraltheorem von KONTOROWICH-LEBEDEW

Erfolgt die Erregung durch einen zonalen Stromring in der Oberfläche des Kegels wie in Bild 6, so hat als maßgebend die Gl. 1 (23a) zu gelten. Nach den Gl. (2) ist dann im Hinblick auf Gl. (7a₂) und Gl. (21)

$$E_r(r, \vartheta) = \frac{U_\varphi}{2r \cdot \sqrt{r/r'}} \cdot \int_{\mathbb{C}} \Delta_t(r'k; a k) \cdot \frac{P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \vartheta)}{P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \alpha)} \cdot \frac{H_t^{(1)}(rk)}{h_t^{(1)}(ak)} \cdot t \cdot dt, \quad (1a)$$

$$E_\vartheta(r, \vartheta) = -\frac{U_\varphi}{2r} \sqrt{r'k} \cdot \int_{\mathbb{C}} \Delta_t(r'k, a k) \cdot \frac{P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \vartheta)}{P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \alpha)} \cdot \frac{h_t^{(1)}(rk)}{h_t^{(1)}(ak)} \cdot \frac{t \cdot dt}{t^2 - 1/4} \quad (1b)$$

$$H_\varphi(r, \vartheta) = i \omega \varepsilon_0 \cdot \frac{U_\varphi}{2 \sqrt{r/r'}} \cdot \int_{\mathbb{C}} \Delta_t(r'k, a k) \frac{P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \vartheta)}{P_{t-\frac{1}{2}}(-\cos \alpha)} \frac{H_t^{(1)}(rk)}{h_t^{(1)}(ak)} \cdot \frac{t \cdot dt}{t^2 - 1/4} \quad (1c)$$

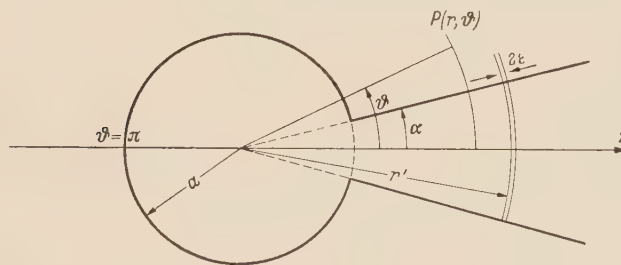


Bild 6. Dieses Bild gibt die Anordnung von Kegel und Kugel an, wie sie den Rechnungen im Abschnitt 3 entspricht. Es ist zu beachten, daß in Bild 5 $\vartheta = 180^\circ - \alpha$ ist mit der Bedeutung von α wie im Text.

und hierin ist weiter

$$\Delta_t(r'k, a k) = \begin{vmatrix} J_t(r'k) & H_t^{(1)}(rk) \\ j_t(ak) & h_t^{(1)}(ak) \end{vmatrix}$$

$$(\alpha \leq \vartheta \leq \pi; a < r' < r < \infty; \vartheta' = \alpha; \beta = \pi).$$

Für $r < r'$ sind unter dem Integralzeichen die Veränderlichen r und r' zu vertauschen. Der Weg \mathbb{C} umschlingt gemäß Bild 2 die reelle Achse der t -Ebene mit den Punkten $+1/2, +3/2 + \dots$.

Für $\vartheta = \alpha$ und $a \rightarrow 0$ reduziert sich der Ausdruck für $E_r(r, \alpha)$ zufolge Gl. (1a) auf die Form:

$$\{E_r(r, \alpha)\}_{a=0} = \frac{U_\varphi}{2r \cdot \sqrt{r/r'}} \cdot \int_{\mathbb{C}} t \cdot J_t(r'k) \cdot H_t^{(1)}(rk) \cdot dt \quad (r' < r). \quad (2)$$

Nun gelten bekanntlich, falls bei endlich bleibendem $z = |z| \cdot e^{i\zeta}$ in $t = |t| \cdot e^{i\tau}$ die Größe $|t| \rightarrow \infty$ strebt, für die Zylinderfunktionen $J_t(z)$ und $H_t^{(1)}(z)$ die beiden folgenden asymptotischen Darstellungen:

$$|J_t(z)| \sim (2\pi \cdot |t|)^{-1/2} \cdot \exp \left\{ -|t| \cdot \cos \tau \cdot \ln \left(\frac{2 \cdot |t|}{e \cdot |z|} \right) + |t| \cdot \sin \tau \cdot (\tau - \zeta) \right\} \quad (-\pi < \tau, \zeta < +\pi) \quad (2a)$$

$$|H_t^{(1)}(z)| \sim (2/\pi |t|)^{1/2} \cdot \exp \left\{ +|t| \cdot \cos \tau \cdot \ln \left(\frac{2 \cdot |t|}{e \cdot |z|} \right) - |t| \cdot \sin \tau \cdot (\tau - \zeta) \right\} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \tau, \zeta < +\frac{\pi}{2} \right). \quad (2b)$$

Die erste folgt unmittelbar aus der für $t \rightarrow \infty$ geltenden Näherungsgleichung

$$J_t(z) \approx (z/2)^t / \Gamma(t+1) \quad (|\arg(t)| < \pi), \quad (2\alpha)$$

die nichts anderes als das erste Glied der Reihenentwicklung für $J_t(z)$ darstellt, die zweite aus der bekannten SOMMERFELDSchen Integraldarstellung [18]

$$H_t^{(1)}(z) \sim \left(\frac{2}{\pi z \cdot \sin \alpha} \right)^{1/2} \cdot e^{v \cdot (\alpha - \mathfrak{I} \alpha) \mp \frac{\pi i}{2}} \quad \begin{aligned} v &= t \cdot \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I} \alpha \\ \alpha &= \ln \left(\frac{v}{z} + \sqrt{\left(\frac{v}{z} \right)^2 - 1} \right) \end{aligned} \quad (2\beta)$$

die hier nur für den einfachen Fall $|v| \gg |z|$ in Anspruch genommen zu werden braucht.

Geht man mit den Gln. (2a, b) in Gl. (2) ein, so zeigt sich, daß das Integral über den Weg \mathfrak{C} für alle $r \neq r'$ auch jetzt noch absolut konvergiert, und da in (2) der Integrationsweg, ohne singuläre Stellen zu überqueren, auf einen beliebig kleinen Kreis zusammengezogen werden kann, so ist für $a = 0$ die Vektorkomponente $E_r(r, \alpha)$, solange $r \neq r'$ ist, identisch Null.

Um zu dem Wert des Integrals in Gl. (2) für $r = r'$ zu kommen, läßt sich das Integraltheorem von LEBEDEW/KONTOROWICH [19] heranziehen. Hiernach ist

$$f(kr) = + \frac{1}{2} \cdot \int_{-i\infty}^{+i\infty} t \cdot J_t(kr) \left(\int_0^\infty f(kr) H_t^{(1)}(kr) \cdot \frac{d(kr)}{kr} \cdot dt \right) \quad (3)$$

$$(k = |k| \cdot e^{+i\alpha}; \quad 0 < \alpha < \pi; \quad |\operatorname{Re}(t)| < \delta < 0).$$

Ist nun für einen sehr kleinen, positiven Wert $\varepsilon \ll r'$

$$f(kr) = \begin{cases} 0 & (0 \geq r \leq r' - \varepsilon; \quad r' + \varepsilon < r < \infty) \\ C & (r' - \varepsilon \geq r \leq r' + \varepsilon) \end{cases}$$

so gilt unter Berücksichtigung von Gl. (3) der folgende Grenzwert:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-i\infty}^{+i\infty} t \cdot J_t(kr') \left(\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} H_t^{(1)}(kx) \frac{dx}{x} \right) dt \right) = 1. \quad (3a)$$

Für $r = r'$ kann aber in der Tat der Weg \mathfrak{C} im Integral (2) zu dem Weg $-i\infty \cdots +i\infty$ von Gl. (3a) aufgebogen werden. Das Verschwinden des Integrals von Gl. (3a) für $r \neq r'$ erfolgt jetzt durch ständigen Vorzeichenwechsel. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ ergibt sich an der Stelle r' der oben angegebene Wert.

Es wird dann damit im Hinblick auf Gl. (2):

$$\{E_r(r, \alpha)\}_{a=0} = \frac{U_\varphi}{2r'} \cdot \frac{r'}{\varepsilon} = \frac{U_\varphi}{2\varepsilon} \quad (r = r', \quad \vartheta = \alpha). \quad (4)$$

Dieser Wert entspricht den Erwartungen, denn hiernach erscheint die Feldstärke E_r am Spalt des Kegelmantels als die durch die Spaltbreite 2ε dividierte Spannung U_φ zwischen den kugelförmigen Begrenzungsflächen $r' \pm \varepsilon$ des Spaltes.

3.2. Die durch den Spalt abgestrahlte Energie

Da die gesamte abgestrahlte Energie aus dem Inneren des Spaltes heraustritt, so ist es für die Berechnung dieser Energie das Einfachste, den Energiefluß am Ort des Spaltes selbst zu berechnen. Offenbar ist dann:

$$S_\varphi = \pi r' \cdot U_\varphi \cdot H_\varphi(r', \alpha) \cdot \sin \alpha. \quad (5)$$

Unter der ausdrücklichen Voraussetzung eines nunmehr reellen Wertes von k_0 ergibt sich dann einmal für S_ϑ die Reihenentwicklung:

$$S_\vartheta = \pi^2 \omega \varepsilon_0 \cdot \sin \alpha \cdot U_\varphi^2 \cdot \sqrt{r'^3/a} \cdot \sum_{q=1}^{\infty} \left| \frac{J_{\tau_q}(r' k_0)}{j_{\tau_q}(a k_0)} \frac{H_{\tau_q}^{(2)}(r' k_0)}{h_{\tau_q}^{(2)}(a k_0)} \right| \times \frac{\tau_q + 1/2}{\tau_q \cdot (\tau_q + 1)} \cdot \frac{P_{\tau_q}^1(-\cos \alpha)}{(\partial P_x(-\cos \alpha)/\partial x)_{x=\tau_q}} \frac{H_{\tau_q}^{(2)} + \frac{1}{2}(r' k_0)}{h_{\tau_q}^{(2)} + \frac{1}{2}(a k_0)}, \quad (6a)$$

denn für ein solches k_0 ist $H_{\tau_q + \frac{1}{2}}^{(1)}(r' k_0) = H_{\tau_q + \frac{1}{2}}^{(2)}(r' k_0)$.

Ersetzt man in Gl. (1c) den Weg \mathfrak{C} durch den oberhalb der reellen Achse verlaufenden Weg \mathfrak{C}' in Bild 4, so kann man jetzt das Integral in Gl. (1c) dadurch auflösen, daß man den Integrationsweg in der oberen t -Halbebene durch einen Halbkreis zu einem geschlossenen Weg ergänzt und dann auf die dort liegenden Pole von $1/h_t^{(1)}(a k_0)$ zusammenzieht. Man erhält dann

$$\bar{S}_\vartheta = -\pi^2 \omega \varepsilon_0 \cdot \sin \alpha \cdot U_\varphi^2 \cdot \sqrt{r'^3/a} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{J_{\nu_n}(r' k_0)}{j_{\nu_n}(a k_0)} \frac{H_{\nu_n}^{(1)}(r' k_0)}{h_{\nu_n}^{(1)}(a k_0)} \right| \times \times \frac{H_{\nu_n}^{(1)}(a k_0)}{(\partial h_{\nu_n}^{(1)}(a k_0)/\partial x)_{x=\nu_n}} \cdot \frac{\nu_n}{\nu_n^2 - 1/4} \cdot \frac{P_{\nu_n - \frac{1}{2}}^1(-\cos \alpha)}{P_{\nu_n - \frac{1}{2}}(-\cos \alpha)}. \quad (6b)$$

In der angegebenen Schreibweise gibt allerdings die linke Seite nicht den komplexen Wert von S_ϑ an wie in Gl. (6a), sondern den konjugierten komplexen Wert von S_ϑ . In der ersten Spalte der Determinante dieser Gleichung dürfte es noch in der Regel eine Vereinfachung bedeuten, wenn die Besselsche Funktion durch die Hankelschen Funktionen zweiter Art ersetzt wird.

Die in Gl. (6b) auftretenden Zylinderfunktionen sind im Falle einer numerischen Berechnung durch die schon früher hergeleiteten Näherungswerte zu ersetzen. Ebenso können in (6b) die jetzt komplexwertigen Kugelfunktionen näherungsweise aus der Gleichung

$$P_{\nu - \frac{1}{2}}(\cos \gamma) \sim [e^{+i(\nu \gamma - \pi/4)} + e^{-i(\nu \gamma - \pi/4)}] \cdot (2\pi \nu \cdot \sin \gamma)^{-1/2}, \quad (7)$$

berechnet werden. Die rechte Seite stellt hierin das erste Glied einer asymptotischen Entwicklung für die Funktion $P_\nu(\cos \gamma)$ bei großen Werten des Index dar. Diese Voraussetzung kann für die Werte ν_n in den Gln. (6a, b) als erfüllt angesehen werden.

Schlußbemerkungen

In der vorliegenden Arbeit wurde in der Regel von den beiden Winkeln α und β angenommen, daß α ein spitzer und β ein stumpfer Winkel ist. An der äußeren Form der Lösungsgleichungen ändert sich aber nichts, wenn α und β beide in dem Winkelbereich 0 und $\pi/2$ liegen. Sind dann keine Kugelflächen vorhanden und ist überdies $\alpha < \vartheta' < \beta$, so liegt der Fall des kegelförmigen Doppelhorns vor. Dieser Fall wurde bereits in den älteren Arbeiten des Verfassers behandelt. Die Entwicklungen der Lösungen nach den Eigenwerten τ_q der Kugelfunktionen sind im Fall des Horns viel besser brauchbar als im vorliegenden Fall der Antenne, weil die Nullstellen τ_q nach Bild 5 dann in viel größeren Sprüngen gegen ∞ streben und dadurch die Konvergenz der entsprechenden Reihen wesentlich besser ist.

In einer weiteren Arbeit werden die hier aufgestellten Gleichungen dazu Verwendung finden, um den Einfluß der dem Kegel aufgesetzten Kugel auf die Intensität der ausgesandten Strahlung unter verschiedenen Bedingungen zahlenmäßig zu bestimmen.

Literatur

- [1] STRATTON, J. A.: Steady-State Solutions of Electromagnetic Field Problems, J. Appl. Phys. 12 (1941) S. 230—248. — [2] CHU, L. J., and J. A. STRATTON: Forced Oscillations of a conducting sphere, J. Appl. Phys. 12 (1941) S. 236. — [3] CHU, L. J., and J. A. STRATTON: Forced Oscillations of a prolate spheroid, J. Appl. Phys. 12

(1941) S. 241—248. — [4] INFELD, L.: The Influence of the Width of the Gap upon the Theory of Antennae, Quart. appl. Mathematics 5 (1947) S. 113—132. — [5] METZLER, E.: Erzwungene elektrische Schwingungen an rotationssymmetrischen Leitern bei zonaler Anregung. Zürich 1943. [6] BUCHHOLZ, H.: Die axialsymmetrische elektromagnetische Strahlung zwischen konfokalen Drehparabolen bei verschiedenen Anregungsarten. Ann. Phys. 6. Folge 2 (1948) S. 185—210. — [7] BUCHHOLZ, H.: Die Bewegung elektromagnetischer Wellen in einem kegelförmigen Horn, Ann. Phys. 37 (1940) S. 173—225. — [8] BUCHHOLZ, H.: Das Strahlungsfeld eines quer zur Achse stehenden Dipols im Hohlraum eines Kegels, Jahrb. der AEG-Forschung 7 (1941) S. 3—16. — [9] BUCHHOLZ, H.: Gesetzmäßigkeiten über die Bewegung elektromagnetischer Wellen in einem Kegelhorn, Arch. Elektrotechn. 40 (1952) S. 346—362. — [10] WATSON, G. N.: The Transmission of electric Waves round the Earth, Proc. Royal Soc. London, Ser. A 95 (1919) S. 546—563. — [11] BUCHHOLZ, H.: Näherungsformeln für eine häufig vorkommende Differenz von Produkten zweier Zylinderfunktionen, Phil. Mag. Ser. 7, 27 (1939) S. 407—420. — [12] BUCHHOLZ, H.: Besondere Reihenentwicklungen für eine häufig vorkommende, zweireihige Determinante mit Zylinderfunktionen und ihre Nullstellen, ZAMM 29 (1949) S. 356 bis 367. — [13] SCHELKUNOFF, S. A.: Elektromagnetic Waves, New York 1957. — [14] FRANZ, W., u. R. GALLE: Semiasymptotische Reihen für die Beugung einer ebenen Welle am Zylinder, Z. Naturforsch. 10a (1955) S. 374 bis 378. — [15] WATSON, G. N.: Theory of Besselfunctions, Cambridge 1922. — [16] Tables of Bessel Functions of fractional order, New York; Columbia University Press 1948. — [17] Mathematical Tables, Part. Volume B: The Airy-Integral, Cambridge: University Press 1946. — [18] SOMMERFELD, A.: Theoretische Physik, Bd. VI, Partielle Differentialgleichungen, Wiesbaden: Dietrichsche Verlagsbuchhandlung 1947. [19] KONTOROWICH, M. I., and N. N. LEBEDEV: J. Phys. 1 (1939) S. 229—241.

Prof. Dr.-Ing. H. BUCHHOLZ, Darmstadt, Schloßgartenstr. 2
Lehrstuhl für Theoretische Elektrotechnik der Technischen Hochschule

Der Wärmewiderstand zwischen Zahn und Joch

Von

J. HAK, Brunn

Mit 8 Textabbildungen

(Eingegangen am 20. Mai 1959)

Übersicht. Es werden Unterlagen zur Bestimmung des Wärmewiderstandes zwischen dem Zahn und dem Joch einer elektrischen Maschine gegeben und gezeigt, welchen Einfluß die Zerlegung des Eisens in zwei Wärmequellen auf die Genauigkeit der Berechnung von Wärmequellen-Netzen ausüben kann.

1. Einleitung

Wenn man im Wärmequellen-Netz einer elektrischen Maschine das Stator- oder Rotor-Eisen durch eine einzige Wärmequelle abbildet, so ist dies eine Näherung, bei der man die verschiedenen Eisenverluste sowie die verschiedenen Querschnitte im Zahn und Joch vernachlässigt. Die zur größeren Genauigkeit führende Zerlegung des Eisens in zwei Quellen erfordert die Berechnung oder wenigstens die genügende Abschätzung des Wärmewiderstandes zwischen Zahn und Joch.

Wird eine auf dem Umfang der Maschine symmetrische Kühlung und Wärmeerzeugung angenommen, so genügt es, die Hälfte einer Nut und eines Zahnes nach Bild 1a zu betrachten. Die Wärmeabfuhr erfolgt mit den Wärmeübergangszahlen ϑ_1 , ϑ_3 in den Luftspalt und mit ϑ_2 in den Statorkörper bzw. in die Kühlkanäle in demselben. Die Wärmeflüsse sind dementsprechend q_{10} , q_{30} , q_{20} und außerdem q_{12} zwischen Zahn und Joch, bzw. q_{13} und q_{32} . Die Richtung der Wärmeflüsse q_{12} , q_{13} , q_{32} ist im allgemeinen unbekannt, sie könnten auch in entgegengesetzter Richtung, als im Bild 1a eingezeichnet, fließen.

Der entsprechende Ausschnitt aus dem ganzen Wärmequellen-Netz der Maschine ist im Bild 1b angedeutet mit den Quellen z_1 = Zahn, z_2 = Joch, z_3 = Kupfer und mit den Wärmewiderständen r_{12} usw. zwischen ihnen. Die Strömungen und Wärmewiderstände in der Axialrichtung der Maschine können hier unberücksichtigt bleiben. Sie gliedern sich einfach zu den vorhergehenden parallel, wie es im Prinzip der Wärmequellen-Methode liegt: z_3 ist also mit z_4 = Wickelkopf über einen inneren axialen Widerstand r_{34} verbunden, zu r_{20} liegt parallel der der Abkühlung der Stirnflächen des Statoreisens entsprechende Widerstand r_{2a} usw.

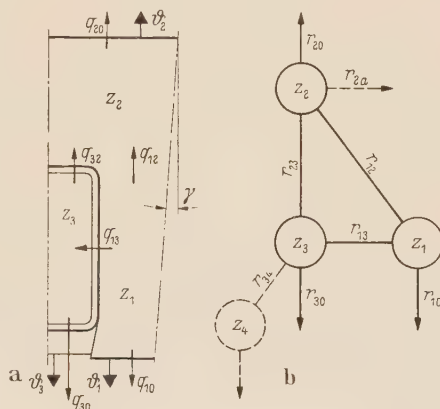


Bild 1. a Wärmeströmung im System Zahn-Joch-Nutkuper. z_1 = Zahn, z_2 = Joch, z_3 = Nutkuper. b entsprechender Ausschnitt aus dem Wärmequellen-Netz der Maschine.

2. Vereinfachung des Problems

Bei Vernachlässigung der Axialströmung liegt ein zweidimensionales Problem vor. Für die Temperaturverteilung im Kupfer und im Eisen gelten zwei Differentialgleichungen (Poisson'sche Gleichungen) mit zwei Veränderlichen, deren gemeinsame Lösung bei den komplizierten Grenzbedingungen und bei der ungleichen Wärmeerzeugung im Zahn und Joch undurchführbar ist. Die Methode der konformen Abbildung, auch bei Vernachlässigung der Neigung zwischen den Begrenzungslinien (Winkel γ im Bild 1a) führt auf praktisch unlösbare Integration. Eine Ergänzung dieser Methode durch graphische Integration ist nur bei mäßiger Anzahl von Grenzbedingungen anwendbar und hier unbrauchbar, ungeachtet dessen, daß andere Schwierigkeiten infolge der Wärmeerzeugung im abgebildeten Polygon entstehen.

Es wird sich zeigen, daß die Widerstandserhöhung, die durch die Querschnittserweiterung des Wärmeflusses q_{12} verursacht wird, nur klein ist bei den Abmessungsverhältnissen, die uns interessieren, und wir können, neben der Vernachlässigung des Neigungswinkels, noch weitere gründliche Vereinfachungen zulassen. Wir untersuchen nur den Wärmewiderstand zwischen zwei Stäben verschiedener Querschnitte ohne innere Wärmezeugung und verlängern sie beiderseitig ins unendliche (Bild 2 a, b, c). Die für c gefundene Widerstandserhöhung, die durch Lösung einer Potentialströmung leicht zu erhalten ist, wollen wir dann näherungsweise auch in allen tatsächlich vorkommenden Fällen verwenden.

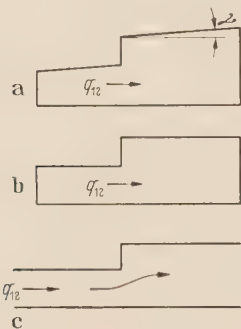


Bild 2. Vereinfachung des Problems. a Neigungswinkel γ zwischen den Symmetrieachsen der Nut und des Zahnes. b Neigungswinkel nicht berücksichtigt, c Verlängerung beider Stäbe.

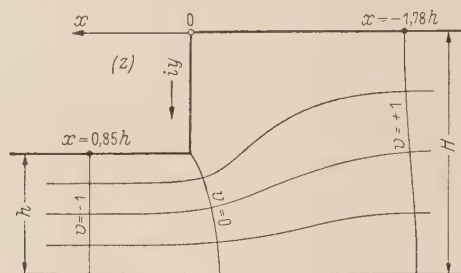


Bild 3. Lösung der Potentialströmung.

3. Lösung der Potentialströmung

Die Lösung der einfachen Potentialströmung nach Bild 2c ist bekannt und in mehreren Lehrbüchern zu finden (z. B. [1] S. 358, [2] S. 125, [3] S. 262), so daß die Ableitung der Endformel hier nicht notwendig erscheint. Für den Zusammenhang zwischen der Grundebene $z = x + iy$ und der Abbildungsebene $v + iw$ gelten die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{H}{\pi} \left[\ln \frac{\beta - 1}{\beta + 1} - \frac{h}{H} \ln \frac{\beta - h/H}{\beta + h/H} \right], \\ \beta &= \sqrt{\frac{\zeta - 1}{\zeta - a}}, \quad a = (H/h)^2, \quad \zeta = e^{\pi(v+iw)}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Die Lage des Koordinatensystems z und die Abmessungen h , H sind im Bild 3 eingetragen. Beim Verhältnis $H/h = 2$ verlaufen bei $v = +2$ und $v = -2$ die Potentiallinien schon praktisch genügend genau geradlinig, so daß bei $|v| > 2$ nur mit reellen Variablen gerechnet werden kann.

Für große positive $v = v_1$ ist $\zeta = e^{\pi v_1}$ sehr groß und man kann

$$\beta = \sqrt{1 + \frac{a-1}{\zeta-a}} = 1 + \frac{a-1}{2(\zeta-a)}$$

setzen. Der entsprechende Wert von $z = x_1$ ist, wie eine einfache Berechnung nach zulässiger Vereinfachung ergibt,

$$x_1 = \frac{H}{\pi} \left(\ln \frac{a-1}{4} + \frac{h}{H} \ln \frac{1+h/H}{1-h/H} \right) - H v_1 < 0. \quad (2)$$

Für große negative $v = v_2$ ist ζ sehr klein, so daß

$$\beta = \sqrt{\frac{1-\zeta}{a-\zeta}} = \frac{1}{\sqrt{a}} [1 - (1 - 1/a) \zeta/2]$$

ist, und für $z = x_2$ erhält man

$$x_2 = \frac{H}{\pi} \left(\ln \frac{1 - h/H}{1 + h/H} + \frac{h}{H} \ln \frac{4}{1 - 1/a} \right) - h v_2 > 0. \quad (3)$$

Der Wärmewiderstand zwischen den beiden Stäben von der Länge $|x_1|$ und x_2 ist, da $v_1 - v_2$ den Temperaturunterschied darstellt und der Wärmefluß = 1 (W) angenommen wurde,

$$r = \frac{v_1 - v_2}{\lambda u}, \quad (^\circ\text{C/W}) \quad (4)$$

wobei λ die Wärmeleitfähigkeit des Materials beider Stäbe (W/m $^\circ\text{C}$) und u (m) die zur Bildebene senkrechte Abmessung der Querschnitte bedeutet.

Setzt man in (4) die aus (2) und (3) berechneten Werte v_1 und v_2 ein, so ergibt sich

$$r = \frac{1}{\lambda u} \left(\frac{|x_1|}{h} + \frac{x_2}{H} + R_z \right) \quad (5)$$

mit

$$R_z = \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{H}{h} + \frac{h}{H} \right) \ln \frac{1 + h/H}{1 - h/H} + 2 \ln \frac{H/h - h/H}{4} \right]. \quad (6)$$

Es ist also $r_z = R_z/\lambda u$ die Vergrößerung des Wärmewiderstandes oder der Zusatzwiderstand zwischen den beiden Stäben, der durch die Querschnittsänderung hervorgerufen wird. Werte von R_z nach der Gl. (6) sind für verschiedene Verhältnisse h/H im Bild 4 dargestellt.

Eine Nachrechnung ergibt, daß bei $H/h = 2$ auch in der Nähe von $|v| = 1$, wo die Potentiallinien schon leicht gekrümmt sind (s. Bild 3), der Wert von R_z nur unbedeutend von dem für große $|v|$ berechneten Wert nach (6) abweicht. Die kleinsten für elektrische Maschinen in Betracht kommenden Verhältnisse x/H liegen bei 1,2, während H/h in der Nähe von 2 liegt. Nimmt man für den ungünstigsten Fall $x_1/h = x_2/H = 1,2$ an, so beträgt die perzentuale Vergrößerung durch den Zusatzwiderstand

$$\frac{100 R_z}{x \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{h} \right)} = \frac{H}{x} \frac{100 R_z}{1 + H/h}, \quad (\%) \quad (7)$$

also bei $H/h = 2 \dots (1/1,2) (100 \cdot 0,25/3) = 7\%$. Nur in Spezialfällen, z. B. für einen Rotor mit sehr schmalen Zähnen, kann das Verhältnis H/h bis auf 4 ansteigen. Auch dann beträgt die perzentuale Vergrößerung nach (7) nur rund 12%.

Dieser verhältnismäßig kleine Einfluß des Zusatzwiderstandes rechtfertigt die Annahme, daß man praktisch mit R_z nach Gl. (6) auch in allen tatsächlich vorkommenden Fällen rechnen kann. Bei innerer Wärmeerzeugung in beiden Stäben ergibt R_z etwas zu hohe Werte von r_z , wenn der Zahn wärmer als das Joch ist, da der breitere Querschnitt in Wirklichkeit besser ausgenutzt wird. Für größere Maschinen, wo die Verhältnisse x_1/h und x_2/H größer als bei dem oben berechneten ungünstigsten Fall sein können, beträgt die Vergrößerung nur einige v. H. der ohne R_z berechneten Werte.

4. Gang der Berechnung

In einer früheren Arbeit [4] wurde gezeigt, daß die inneren Wärmewiderstände, die in einem Wärmequellen-Netz vorkommen können, nur durch eine fortschreitende Näherung genau berechenbar sind, da sie nämlich von den Temperaturen aller benachbarten Quellen abhängen. Zur praktischen Anwendung der Methode ist es deshalb erforderlich, sie durch Näherungsausdrücke zu berechnen, welche man bei Vernachlässigung einiger Quellen des Netzes oder bei Ab-

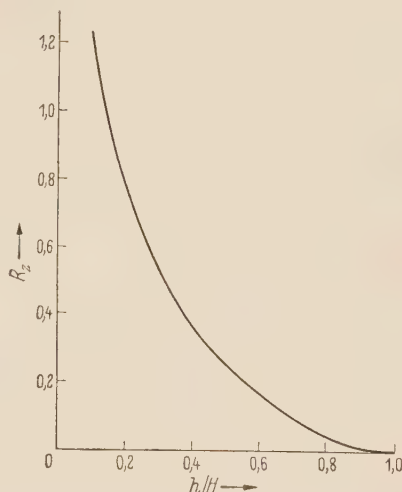


Bild 4. Werte von R_z nach Gl. (6) in Abhängigkeit vom Verhältnis h/H .

schätzung einiger Temperaturen benachbarter Quellen erhält. Auch der gesuchte Wärmewiderstand zwischen Zahn und Joch ist ein innerer Widerstand, der ähnlich wie die inneren axialen Wärmewiderstände im Kupfer zu berechnen ist.

Wir betrachten nur den Fall einer rechteckigen Nut. Bei anderen Nutformen muß man sich mit einer Abschätzung der für die Berechnung von r_{13} und r_{23} maßgebenden Abmessungen begnügen. Für den Zahn wird mit einer mittleren konstanten spez. Wärmeerzeugung \dot{q}_1 (W/m³) gerechnet. Die Berücksichtigung der in Wirklichkeit örtlich veränderlichen Wärmeerzeugung $\dot{q}_1 = f(x)$ ist umständlich und scheint praktisch nicht notwendig zu sein. Wichtiger und sehr wünschenswert wäre dagegen die Bestimmung von \dot{q}_1 durch Messung. Bekanntlich müssen die berechneten Eisenverluste der Maschine, welche den an Proben ermittelten Meßwerten entsprechen, durch einen Korrektionsfaktor erhöht werden, der den Einfluß der Bearbeitung darstellt. Diese Bearbeitung beeinflusst in viel höherem Maße die Zähne als das Joch, so daß zwei verschiedene Korrektionsfaktoren vorteilhaft wären, um den Einfluß der Bearbeitung besser auszudrücken.

Wird $\gamma = 0$ angenommen, so liegen zwei Stäbe nach Bild 5 vor, mit den Längen l_1, l_2 (m) mit den Querschnitten $s_1 = h u, s_2 = H u$ (m²), mit der Wärmeleitfähigkeit λ (W/m °C) und mit der spez. Wärmeerzeugung \dot{q}_1, \dot{q}_2 (W/m³). Die Abszissen x sind separat in derselben Richtung genommen. Der Verlauf der beiden Temperaturen t_1, t_2 wird mit Hilfe der Poissonschen Gleichung für eindimensionale Wärmeströmung gefunden. Für den Übergang zwischen den beiden Stäben setzen wir

$$-\lambda s_1 \left(\frac{dt_1}{dx} \right)_{x=l_1} = -\lambda s_2 \left(\frac{dt_2}{dx} \right)_{x=0} = q_{12}, \quad (8)$$

wobei q_{12} der vom Zahn ins Joch gehende Wärmefluß (W) ist. Den Einfluß des Zusatzwiderstandes r_z können wir näherungsweise so darstellen, daß wir

$$t_{1l} - t_{20} = r_z q_{12} \quad (9)$$

setzen (Bild 5). Der tatsächliche Temperaturverlauf erfolgt nach einer Kurve k , so daß die Tangente zu t_2 bei $x = 0$ in Wirklichkeit etwas kleiner ist, als angenommen wurde. Man be-

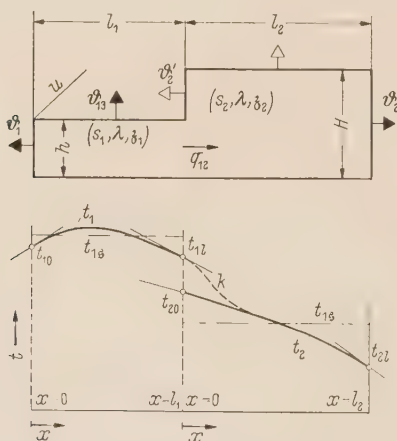


Bild 5. Zwei Stäbe, die näherungsweise den Zahn und das Joch darstellen.

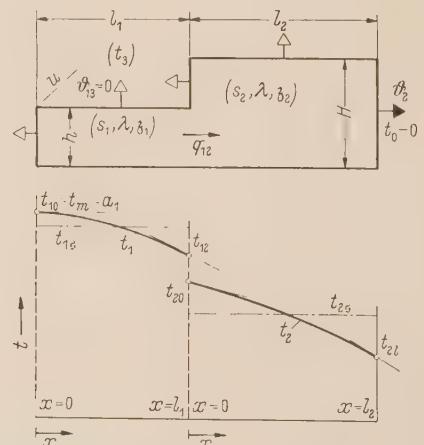


Bild 6. Zwei Stäbe wie im Bild 5. Wärmeabfuhr nur auf dem Endquerschnitt des zweiten Stabes (Joch). Dieses Bild gilt auch für die Berechnung bei seitlicher Wärmeabfuhr vom ersten Stab (Zahn), s. Absatz 6.

rechnet die beiden mittleren Temperaturen t_{1s}, t_{2s} der Stäbe und der gesuchte Wärmewiderstand ist dann

$$r_{12} = \frac{t_{1s} - t_{2s}}{q_{12}}. \quad (10)$$

Der Temperaturkoeffizient der Eisenverluste ist bekanntlich negativ [5] und kleiner als derjenige für Kupfer. Wir können also mit konstanter Wärmeerzeugung im Eisen rechnen.

5. Erste Näherung

Wenn angenommen werden kann, daß die Abkühlung überwiegend nur auf der Statoreisen-Oberfläche stattfindet, daß also ϑ_1 , ϑ_{13} , ϑ'_2 im Bild 5 vernachlässigt werden können, so hat man zwei Stäbe nach Bild 6 zu behandeln. Die Poissonsche Gleichung für die Zahntemperatur t_1 vereinfacht sich zu

$$-\lambda s_1 \frac{d^2 t_1}{dx^2} = s_1 \vartheta_1 \quad (11)$$

und ist durch die Parabel 2°

$$t_1 = a_1 - c_1 x^2$$

gelöst. Für t_2 gilt dieselbe Differentialgleichung, es ist jedoch

$$t_2 = a_2 - b_2 x - c_2 x^2 \quad (12)$$

zu setzen. Die beiden Differentialgleichungen liefern dann $c_1 = \vartheta_1/2\lambda$, $c_2 = \vartheta_2/2\lambda$. Die Beziehung (8) ergibt

$$b_2 = \frac{s_1 l_1 \vartheta_1}{s_2 \lambda}$$

und aus der Gl. (9) erhält man

$$a_2 = a_1 - c_1 l_1^2 - r_z q_{12} \quad (13)$$

mit $q_{12} = \vartheta_1 s_1 l_1$. Der bei $x = l_2$ über s_2 abgehende Fluß ist der gesamten Wärmeerzeugung gleich, so daß

$$\vartheta_1 s_1 l_1 + \vartheta_2 s_2 l_2 = \vartheta_2 s_2 t_{2l}$$

ist, wenn man die Umgebungstemperatur, in welche ϑ_2 mündet, zur Bezugstemperatur der Berechnung wählt ($t_0 = 0$). Aus dieser letzten Gleichung erhält man einen Ausdruck für a_2 , der zusammen mit (13) den Koeffizienten a_1 oder die Maximaltemperatur am Zahnkopf

$$a_1 = t_{1m} = \frac{\vartheta_1}{\lambda} l_1 \left[\frac{l_1}{2} + \frac{s_1}{s_2} \left(l_2 + \frac{\lambda}{\vartheta_2} \right) \right] + \frac{\vartheta_2}{\lambda} l_2 \left(\frac{l_2}{2} + \frac{\lambda}{\vartheta_2} \right) + r_z \vartheta_1 s_1 l_1$$

ergibt.

Die mittleren Temperaturen beider Stäbe sind

$$t_{1s} = a_1 - c_1 l_1^2/3 \quad \text{und} \quad t_{2s} = a_2 - b_2 l_2/2 - c_2 l_2^2/3$$

und der gesuchte Wärmewiderstand zwischen Zahn (l_1) und Joch (l_2) nach Gl. (10) ist nach entsprechender Umstellung, wenn noch $s_1/s_2 = h/H$ und $s_1 = h u$ geschrieben wird

$$r_{12} = \frac{l_1}{3 \lambda s_1} + \frac{l_2}{2 \lambda s_2} + \frac{l_2}{6 \lambda s_1} \frac{\vartheta_2 l_2}{\vartheta_1 l_1} + r_z = \frac{1}{\lambda u} \left[\frac{l_1}{3 h} + \frac{l_2}{2 H} \left(1 + \frac{\vartheta_2 H l_2}{3 \vartheta_1 h l_1} \right) \right] + r_z. \quad (14)$$

6. Einfluß der Wicklung

Wenn wir den Einfluß des Wärmeübergangs zwischen dem Zahn und der Wicklung berücksichtigen wollen, so muß die mittlere Nutkupfertemperatur t_3 (Bild 6) abgeschätzt und die Wärmeübergangszahl ϑ_{13} in die Rechnung eingeführt werden. Der Wert von ϑ_{13} ist aus der Isolationsdicke, der mittleren Wärmeleitfähigkeit der Isolation und der Übergangsfläche berechenbar.

Für die Zahntemperatur t_1 gilt statt (11) die Differentialgleichung

$$-\lambda s_1 \frac{d^2 t_1}{dx^2} = s_1 \vartheta_1 - u \vartheta_{13} (t_1 - t_3)$$

und ihre Lösung (vgl. [4], [6]) ist

$$t_1 = a_1 - b_1 \cos(\varrho x)$$

mit

$$a_1 = \frac{\vartheta_1 s_1}{u \vartheta_{13}} + t_3, \quad \varrho = \sqrt{\frac{u \vartheta_{13}}{\lambda s_1}}.$$

Für das Joch gilt die Differentialgleichung (11) mit Index 2 statt 1 und ihre Lösung ist die Gl. (12) mit $c_2 = \frac{3}{2} \lambda$. Die Beziehung (8) liefert

$$b_2 = b_1 \varrho S_1 s_1 / s_2, \quad (15)$$

wenn zur Abkürzung $S_1 = \sin(\varrho l_1)$ geschrieben wird. Aus der Gl. (8) erhält man gleichzeitig

$$q_{12} = -\lambda s_1 (dt_1/dx)_{x=l_1} = \lambda s_1 b_1 \varrho S_1. \quad (16)$$

Die Gl. (9) für den Übergang liefert dann

$$a_1 - b_1 C_1 - a_2 = r_z \lambda s_1 b_1 \varrho S_1 \quad (17)$$

mit $C_1 = \cos(\varrho l_1)$. Für den Übergang über ϑ_2 gilt

$$-\lambda s_2 (dt_2/dx)_{x=l_2} = \vartheta_2 s_2 t_{2l}$$

und daraus, mit Benutzung von (15),

$$a_2 - b_1 \varrho S_1 (l_2 + \lambda/\vartheta_2) s_1/s_2 = c_2 l_2 (l_2 + 2\lambda/\vartheta_2) = T, \quad (18)$$

wobei T zur Abkürzung. Die beiden Koeffizienten a_2 und b_1 sind aus den Gl. (17) und (18) zu berechnen.

Die Differenz der beiden mittleren Temperaturen ist

$$t_{1s} - t_{2s} = a_1 - b_1 S_1/\varrho l_1 - a_2 + b_2 l_2/2 + c_2 l_2^2/3.$$

Wird $a_1 - a_2$ aus der Gl. (17) berechnet, b_2 nach (15) und $c_2 = \frac{3}{2} \lambda$ eingesetzt, so folgt nach einfacher Umformung

$$t_{1s} - t_{2s} = b_1 \left(C_1 - \frac{S_1}{\varrho l_1} + \frac{s_1}{s_2} \varrho S_1 \frac{l_2}{2} + r_z \lambda s_1 \varrho S_1 \right) + \frac{\frac{3}{2} \lambda l_2^2}{6 \lambda}.$$

Der nach (10) berechnete Wärmewiderstand zwischen Zahn und Joch ist dann

$$r_{12} = \frac{1}{\lambda s_1 \varrho} \left(\frac{C_1}{S_1} - \frac{1}{\varrho l_1} \right) + \frac{l_2}{2 \lambda s_2} + r_z + \frac{\frac{3}{2} \lambda l_2^2}{6 \lambda} \frac{C_1/(S_1 \lambda s_1 \varrho) + r_z + (1/\vartheta_2 + l_2/\lambda)/s_2}{a_1 - T}. \quad (19)$$

Mit der Reihenentwicklung $C_1/S_1 = 1/\varrho l_1 + \varrho l_1/3 - \varrho^3 l_1^3/45 + 2 \varrho^5 l_1^5/945 - \varrho^7 l_1^7/4725 + \dots$ im ersten Glied hat man

$$\frac{1}{\lambda s_1 \varrho} \left(\frac{C_1}{S_1} - \frac{1}{\varrho l_1} \right) = \frac{l_1}{3 \lambda s_1} (1 - R),$$

wobei

$$R = \frac{(\varrho l_1)^2}{15} \left[1 - \frac{2}{21} \varrho l_1 + \frac{1}{105} (\varrho l_1)^2 + \dots \right]$$

derselbe Korrektionsfaktor ist, den wir bei der Berechnung von inneren axialen Wärmewiderständen gefunden haben [4], [6]. Das letzte Glied in (19) entspricht dem Einfluß der seitlichen Wärmeströmung zwischen Zahn und Nutkupfer. Wird dieselbe Reihenentwicklung auch im letzten Glied verwendet, so kann der Ausdruck für r_{12} auf die Form

$$r_{12} = \frac{l_1}{3 \lambda s_1} (1 - R) (1 + Z) + \frac{l_2}{2 \lambda s_2} (1 + 2Z) + r_z (1 + Z) + \left(\frac{1}{l_1 u \vartheta_{13}} + \frac{1}{s_2 \vartheta_2} \right) Z \quad (20)$$

überführt werden, wobei

$$Z = \frac{\frac{3}{2} \lambda l_2^2}{6 \lambda (a_1 - T)}$$

bedeutet.

Wenn $t_3 > t_{1s}$ ist, wenn also vom Nutkupfer ein Wärmestrom in den Zahn abgeht, so ist $a_1 - T$ größer als bei entgegengesetzter Stromrichtung. Der Wärmewiderstand r_{12} ist also bei $t_3 > t_{1s}$ kleiner als bei $t_3 < t_{1s}$. Eine ähnliche Auswirkung ist von dem vom Luftspalt in den Zahn oder umgekehrt fließenden Wärmestrom zu erwarten.

Wenn der Wärmewiderstand r_{12} nach (19) oder (20) mit einer geschätzten Nutkupfer-temperatur t_{3g} berechnet wurde, und wenn die Lösung des Wärmequellen-Netzes $t_3 > t_{3g}$ ergibt,

so wurde mit einem zu hohen Werte von r_{12} gerechnet. Ergibt sich jedoch $t_3 < t_{3g}$, so wurde mit zu kleinem r_{12} gerechnet und die Lösung kann dann mit dem korrigierten Wert r_{12} wiederholt werden, wobei es genügt, in a_1 die durch die erste Berechnung gewonnene Nutkupfertemperatur einzusetzen.

Der vom Nutkupfer direkt in das Joch abgehende Wärmefluß q_{32} (Bild 1 a) ist gewöhnlich viel kleiner als q_{13} und verkleinert nur mäßig den nach (14) oder (19) berechneten Wert von r_{12} . Für den Wärmewiderstand r_{23} zwischen Nutkupfer und Joch kann man also genügend genau

$$r_{23} = \frac{\delta}{(s_2 - s_1) \lambda_i} + \frac{l_2}{2 \lambda s_2} \quad (21)$$

setzen, wobei δ die Isolationsdicke (m) und λ_i die mittlere Wärmeleitfähigkeit der Isolation sind.

Bemerkung. Der Einfachheit halber wurden alle Wärmewiderstände, insbesondere r_{12} , r_{23} usw. für eine halbe Nut und einen halben Zahn berechnet. Da bekanntlich die Wärmequellen-Netzmethode entweder für die ganze Maschine oder für eine Nut verwendet werden kann, ist eine entsprechende Umrechnung notwendig. Wird die ganze Maschine behandelt, so sind die hier angegebenen Werte mit $(2 \times \text{Nutenzahl})$ zu dividieren.

7. Einfluß des Neigungswinkels

Der Neigungswinkel γ zwischen der Nut- und Zahn-Achse wird in erster Näherung dadurch berücksichtigt, daß man für s_1 und s_2 die Mittelwerte der in Wirklichkeit veränderlichen Querschnitte einsetzt, also Werte die sich für $x = l_1/2$ bzw. $x = l_2/2$ ergeben. Dabei wird R_x für das tatsächliche Querschnittsverhältnis am Übergang bestimmt.

Für den einfachen im Absatz 5 behandelten Fall kann der Einfluß der Neigung näher untersucht werden. Die Querschnitte beider Stäbe seien s_{10} , s_{20} bei $x = 0$ und s_{1l} , s_{2l} bei $x = l_1$ bzw. $x = l_2$ (Bild 7). Für beliebige x ist also $s_{1x} = s_{10} + \varepsilon x$, $s_{2x} = s_{20} + \varepsilon x$, wenn

$$\varepsilon = (s_{1l} - s_{10})/l_1 = (s_{2l} - s_{20})/l_2$$

bezeichnet. Die mittleren Querschnitte sind

$$s_{1s} = (s_{10} + s_{1l})/2 \quad \text{und} \quad s_{2s} = (s_{20} + s_{2l})/2.$$

Wie eine einfache Ableitung zeigt, gilt für die Temperatur t_1 statt der Gl. (11) die Differentialgleichung

$$-\lambda \frac{d}{dx} \left(s_{1x} \frac{dt_1}{dx} \right) = s_{1x} \beta_1, \quad (22)$$

also

$$\frac{d^2 t_1}{dx^2} + \frac{\varepsilon}{s_{10} + \varepsilon x} \frac{dt_1}{dx} + \frac{\beta_1}{\lambda} = 0 \quad (23)$$

und ihre Lösung ist

$$t_1 = -b_1 (s_{10} + \varepsilon x)^2 + c_1 \ln [Q_1 (s_{10} + \varepsilon x)]. \quad (24)$$

Die Einsetzung in (23) ergibt

$$b_1 = \beta_1 / 4 \lambda \varepsilon^2 \quad (25)$$

und die Grenzbedingung $(dt_1/dx)_{x=0} = 0$ liefert $c_1 = \beta_1 s_{10}^2 / 2 \lambda \varepsilon^2$.

Für die Temperatur t_2 im Joch gelten die Gl. (22) bis (25) mit dem Index 2 statt 1. Die Gl. (8) liefert nach einfacher Berechnung

$$c_2 = \frac{\beta_2 s_{20}^2}{2 \lambda \varepsilon^2} - \frac{\beta_1 l_1 s_{1s}}{\lambda \varepsilon}.$$

Die gesamte Wärme muß über den Endquerschnitt s_{2l} abgeführt werden, was die Gleichung

$$\beta_1 s_{1s} l_1 + \beta_2 s_{2s} l_2 = \vartheta_2 s_{2l} t_{2l} = \vartheta_2 s_{2l} [-b_2 s_{2l}^2 + c_2 \ln (Q_2 s_{2l})] \quad (26)$$

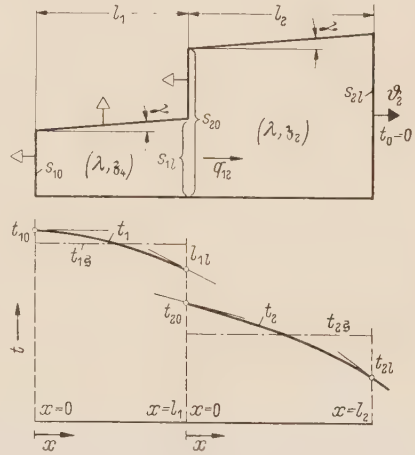


Bild 7. Einfluß des Neigungswinkels zwischen der Nut- und Zahnachse.

ergibt. Für den Übergang bei $x = l_1$ gilt die Gl. (9), also

$$-b_1 s_{1l}^2 + c_1 \ln(\varrho_1 s_{1l}) + b_2 s_{20}^2 - c_2 \ln(\varrho_2 s_{20}) = r_z \beta_1 s_{1s} l_1. \quad (27)$$

Da die Koeffizienten b_1, b_2, c_1, c_2 bekannt sind, kann aus den Gl. (26) und (27) auch $\ln(\varrho_1 s_{1l})$ und $\ln(\varrho_2 s_{2l})$ bestimmt werden. Die durch Integration berechnete mittlere Temperatur im Stab l_1 ist

$$t_{1s} = -\frac{b_1 (s_{1l}^3 - s_{10}^3)}{3 l_1 \varepsilon} + \frac{c_1}{l_1} \left[\frac{s_{10}}{\varepsilon} \ln(s_{1l}/s_{10}) - l_1 + l_1 \ln(\varrho_1 s_{1l}) \right].$$

Gleicher Ausdruck mit dem Index 2 gilt für die mittlere Temperatur t_{2s} im Stab l_2 und nach Einsetzen aller Koeffizienten erhält man für die Differenz

$$t_{1s} - t_{2s} = r_z q_{12} + P_1 \beta_1 / \lambda + P_2 \beta_2 / \lambda$$

mit

$$P_1 = -l_1^2/3 - 3 l_1 s_{10}/4 \varepsilon - s_{10}^2/2 \varepsilon^2 + (s_{10}^3/2 l_1 \varepsilon^3) \ln(s_{1l}/s_{10}) + (l_1 s_{1s} s_{2l}/l_2 \varepsilon^2) \ln(s_{2l}/s_{20}),$$

$$P_2 = l_2^2/12 + l_2 s_{20}/4 \varepsilon + s_{20}^2/2 \varepsilon^2 - (s_{20}^3/2 l_2 \varepsilon^3) \ln(s_{2l}/s_{20}).$$

Wie eine einfache Berechnung zeigt, sind die Verhältnisse $l_1 \varepsilon/s_{10}$ und $l_2 \varepsilon/s_{20}$ von der Nutenzahl unabhängig und zwar ist

$$l_1 \varepsilon/s_{10} = 2 l_1/D = \sigma_1 \quad \text{und} \quad l_2 \varepsilon/s_{20} = 2 l_2/D' = \sigma_2,$$

wenn D den inneren Stator-Durchmesser und $D' = D + 2 l_1$ bezeichnet. Es ist also $s_{1l}/s_{10} = 1 + \sigma_1$, $s_{2l}/s_{20} = 1 + \sigma_2$ und in den Polynomen P_1, P_2 kann die Reihenentwicklung

$$\ln(s_{1l}/s_{10}) = \ln(1 + \sigma_1) = \sigma_1 (1 - \sigma_1/2 + \sigma_1^2/3 + \dots)$$

und eine ähnliche für $\ln(s_{2l}/s_{20})$ verwendet werden. Der gesuchte Wärmewiderstand r_{12} ergibt sich dann nach Gl. (10), mit $q_{12} = \beta_1 l_1 s_{1s}$ und nach entsprechender Umformung zu

$$r_{12} = \frac{l_1}{3 \lambda s_{1s}} (1 - R_1) + \frac{l_2}{2 \lambda s_{20}} (1 - R_2) + \frac{l_2}{6 \lambda s_{1s}} \frac{\beta_2 l_2}{\beta_1 l_1} (1 - R_3) + r_z, \quad (28)$$

wobei die den Einfluß der Neigung γ darstellenden Korrekturfaktoren sind

$$R_1 = \frac{3}{2} \sigma_1 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \sigma_1 + \frac{1}{6} \sigma_1^2 + \dots \right),$$

$$R_2 = \sigma_2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \sigma_2 + \frac{1}{10} \sigma_2^2 - \frac{1}{15} \sigma_2^3 + \dots \right),$$

$$R_3 = \frac{1}{4} \sigma_2 \left(1 - \frac{3}{5} \sigma_2 + \frac{2}{5} \sigma_2^2 - \frac{2}{7} \sigma_2^3 + \dots \right).$$

Bei $\gamma = 0$ geht der Ausdruck (28) in die Formel (14) über. Praktisch vorkommende höchste Werte von $2 l_1/D$ bzw. $2 l_2/D'$ liegen bei 0,4 bis 0,5, so daß die Vernachlässigung des Neigungswinkels γ nur ausnahmsweise zu größeren Fehlern des für die mittleren Querschnitte s_{1s}, s_{2s} berechneten Widerstands r_{12} führen kann.

8. Auswirkung der Zerlegung von Eisenverlusten in Zahn- und Jochverluste

Betrachtet man die drei im Bild 1 b eingezeichneten Wärmequellen $z_1 = \text{Zahn}$, $z_2 = \text{Joch}$, $z_3 = \text{Nutmutter}$, so sieht man, daß ohne Zerlegung nur zwei Quellen ($z_1 + z_2$) = Eisen und $z_3 = \text{Nutmutter}$ (Bild 8 a) vorliegen, die durch einen Wärmewiderstand r'_{23} verbunden sind. Die Zerlegung der Eisenverluste ergibt dagegen das Schema Bild 8 b. Da alle Verluste über den

Abkühlungswiderstand r_{20} in beiden Fällen abgeführt werden müssen, wird die Eisentemperatur t'_2 im ersten Falle der Jochtemperatur t_2 im zweiten Falle gleich:

$$t'_2 = t_2 = r_{20} (z_1 + z_2 + z_3),$$

d. h. die Zerlegung hat keinen Einfluß auf diese Temperatur.

Nach einem einfachen, allgemein gültigen Satz zur direkten Reduktion in Wärmequellen-Netzen kann das Netz Bild 8b in der Weise vereinfacht werden, daß man die Verluste z_1 im

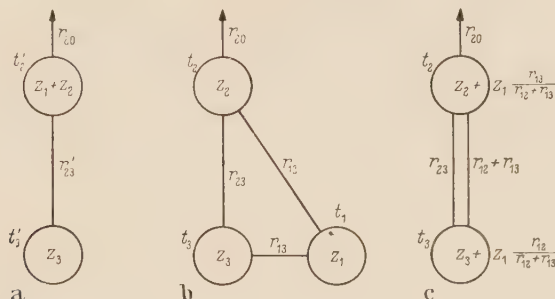


Bild 8. Auswirkung der Zerlegung von Eisenverlusten. a Wärmequellen ohne Zerlegung, b Wärmequellen bei Zerlegung, c Vereinfachtes Netz nach Elimination der Quelle Zahn.

Verhältnis r_{12}/r_{13} zu den Quellen z_2 und z_3 addiert und diese beiden verbleibenden Quellen noch mit dem Widerstand $(r_{12} + r_{13})$ verbindet, wie es im Bild 8c angedeutet ist. Die Nutkupfertemperatur ohne Zerlegung t'_3 ist nach Bild 8a

$$t'_3 = t'_2 + r'_{23} z_3,$$

während bei Zerlegung sich nach Bild 8c

$$t_3 = t_2 + \left(z_3 + z_1 \frac{r_{12}}{r_{12} + r_{13}} \right) \left(\frac{1}{r_{12} + r_{13}} + \frac{1}{r_{23}} \right)^{-1}$$

ergibt. Da aber $r'_{23} = (1/r_{13} + 1/r_{23})^{-1}$ ist, falls man wie üblich nur die Wärmewiderstände der Nutenisolation berücksichtigt, und da $t'_2 = t_2$ ist, beträgt die Erhöhung der Nutkupfertemperatur, welche durch die Zerlegung der Eisenverluste zum Vorschein kommt,

$$t_3 - t'_3 = \frac{r_{12} r_{23}}{r_{12} + r_{13} + r_{23}} \left(z_1 + z_3 \frac{r_{23}}{r_{13} + r_{23}} \right). \quad (29)$$

Ohne Zerlegung ergibt die Berechnung immer zu niedrige Nutkupfertemperaturen. In manchen Fällen kann die Zahntemperatur t_1 höher als die Nutkupfertemperatur t_3 liegen, wenn auch ohne Zerlegung eine Eisentemperatur $t'_2 < t_3$ berechnet wurde. Aus den elementaren Gleichungen, die für das einfache Netz Bild 8b gelten, findet man sofort, daß $t_1 > t_3$ bei

$$\frac{z_1}{z_3} > \frac{r_{23}}{r_{12}} \quad (30)$$

ist. In diesem Falle ist also eine eingehendere Berechnung mit Zerlegung erforderlich. Aber auch bei $t_1 < t_3$ ist der Fehler $(t_3 - t'_3)$ nach Gl. (29) in vielen Fällen nicht unbedeutend. Diese Betrachtungen gelten nur zur Orientierung, da im vollständigen Wärmequellen-Netz der Maschine, wo sich zu den drei hier betrachteten Quellen andere Wärmequellen und Widerstände reihen, die Endergebnisse nicht so einfach sind.

Anwendungsbeispiel. In einer mittleren Maschine hat man im Stator die Verluste $z_1 = 250$, $z_2 = 380$, $z_3 = 350$ (W) und die Wärmewiderstände $r_{12} = 0,06$, $r_{13} = 0,012$, $r_{23} = 0,04$ (°C/W). Es ist $z_1/z_3 = 250/350 = 0,715$ und $r_{23}/r_{12} = 0,04/0,06 = 0,667$, so daß nach (30) die

Zahntemperatur t_1 etwas höher als die Nutkupfertemperatur liegen wird. Der Fehler, der ohne Zerlegung des Eisens entstehen würde, beträgt nach (29)

$$t_3 - t'_3 = \frac{0,06 \cdot 0,04}{0,112} \left(250 + 350 \frac{0,04}{0,052} \right) = 11^\circ \text{C}.$$

Zusammenfassung

Bei zulässiger Vereinfachung kann die Erhöhung des Wärmewiderstandes zwischen zwei Stäben mit ungleichen Querschnitten und ohne innere Wärmezeugung mit Hilfe der bekannten Lösung einer Potentialströmung gefunden werden. Diese Erhöhung ist bei den in elektrischen Maschinen vorkommenden Verhältnissen genügend klein, so daß sie auch für Stäbe mit innerer Wärmezeugung und folglich für den Wärmeübergang zwischen Zahn und Joch näherungsweise verwendet werden kann. Die eigentliche Berechnung des inneren Wärmewiderstandes zwischen Zahn und Joch wird mit Hilfe der für Wärmequellen-Netzmethode allgemein gültigen Beziehungen für zwei Sonderfälle durchgeführt. Die Temperaturverteilung bei Berücksichtigung des Neigungswinkels zwischen der Nut- und der Zahnachse wird für den einfachsten Fall ohne seitliche Wärmeabfuhr aus dem Zahn berechnet, und es zeigt sich, daß dieser Winkel nur einen geringen Einfluß auf den für mittlere Querschnitte ermittelten Wert des Wärmewiderstandes zwischen Zahn und Joch haben kann. Eine Orientierungsberechnung ergibt, daß man ohne Zerlegung der Eisenverluste immer eine zu niedrige Nutkupfertemperatur erhält, und daß in vielen Fällen die Zahntemperatur höher als die Nutkupfertemperatur liegen kann, ohne daß dies bei der Berechnung ohne Zerlegung zum Vorschein kommt.

Literatur

[1] CARSLow, H. S., u. J. C. JAEGER: Conduction of Heat in Solids. Oxford 1948. — [2] BEWLEY, L. V.: Two-Dimensional Fields in Electrical Engineering. New York: McMillan 1948. — [3] MILNE-THOMSON, L. M.: Theoretical Hydrodynamics. London: McMillan 1949. — [4] HAK, J.: Die inneren axialen Wärmewiderstände in elektrischen Maschinen. Arch. Elektrotechn. 43 (1957) S. 58. — [5] MOSSET, M.: De l'intérêt de normes d'utilisation du matériel électrique. Bull. Soc. Fran. Electr. 10 (1950) S. 494. — [6] HAK, J.: Einseitig geheizte Kanäle in elektrischen Maschinen. Arch. Elektrotechn. 44 (1959) S. 107.

Ing. J. HAK, Mez-vyvoj-Brno 2.

Versuch einer genaueren Vorausberechnung des zeitlichen Erwärmungsverlaufes elektrischer Maschinen mittels Wärmequellennetzen

Von

A. KESSLER, Bratislava

Mit 9 Textabbildungen

(Eingegangen am 5. Januar 1959)

Übersicht. Auf einer Untersuchung von Meßergebnissen (des Erwärmungsverlaufes) sowie der wichtigsten Berechnungsmethoden der Enderwärmung elektrischer Maschinen aufbauend, wird eine allgemeine angenäherte Lösung des Problems an Hand der Methode der Wärmequellennetze aufgestellt. Es wird gezeigt, wie diese, praktischen Zwecken angemessen und unter einem Mindestmaß an Rechenarbeit ausgewertet werden kann; die Ausführungen werden sowohl durch praktisch erreichte Ergebnisse, als auch durch eine vollkommen durchgeführte Vorausberechnung des Erwärmungsverlaufes einer Maschine mit Meßergebnissen verglichen und einige Anmerkungen über die Anwendung von automatischen Rechengeräten ergänzt.

Übersicht der wichtigsten Bezeichnungen

t	Zeit
$T(x), T(x, y, z)$	Temperatur: in (x) resp. im Punkte (x, y, z)
$T(x, t), T(x, y, z; t)$	desgleichen zur Zeit t
$\bar{\theta}, \bar{\theta}_v, \bar{\theta}(t)$	mittlere Erwärmung: eines Körpers, der Wärmequelle (v) zur Zeit t
$\bar{\theta}, \bar{\theta}(t), T(t)$	einspaltige Matrix der mittleren Erwärmung resp. Erwärmungsverlaufes (eines Systems von Wärmequellen, Gl. (14))
p, Θ	Zeitkonstante und Koeffizient der Exponentialreihe Gl. (1)
w, W, \bar{W}, \bar{W}^*	Wärmeentwicklung: spezifische, in einer Wärmequelle, einspaltige Matrix Gl. (15) bzw. (5)
λ, H	Wärmeleitzahl, Wärmeübergangszahl
$Q, q; q_v(t)$	Intensität eines Kühlluftstromes, eines Wärmestromes; zur Anwärkung nötige Wärmeleistung zur Zeit t
r, r_w, r_{in}, R	Wärmewiderstand: allgemein, übergangs-, innerer, gesamt
A, A^*	Matrix (reziproke Widerstände) Gl. (13) resp. (5)
$(m c), (m c)_v, C_Q$	Wärmekapazität: eines Körpers, der Wärmequelle (v) , Matrix Gl. (14)
x, l, U, F, S, V	Koordinate, Länge, Umfang, Querschnitt, Oberfläche, Volumen
V_v	Volumen der Wärmequelle (v)
α	Koeffizient der Temperaturabhängigkeit der Wärmeentwicklung
c, n	Transformationsmatrix Gl. (10), Normalform von A^* Gl. (16)

Einleitung

Der Frage nach der Bestimmung des zeitlichen Erwärmungsverlaufes¹ in elektrischen Maschinen wurde bereits eine nicht zu unterschätzende Anzahl von Arbeiten gewidmet, was jedenfalls zeigt, daß dieser Teilfrage des Erwärmungsproblems elektrischer Maschinen schon immer eine ziemliche Aufmerksamkeit geschenkt wurde. Heute ist ihre Aktualität wenn möglich noch angewachsen, da die elektrische Maschine eine immer breitere Anwendung als Antrieb unter den verschiedensten Arbeitsbedingungen und Zyklen findet. Dabei geht es hier ebenso wie bei der Bestimmung der Enderwärmung im Grunde genommen um die richtige Bemessung und wirtschaftliche Ausnutzung der Maschine.

Gehen wir die bisher veröffentlichten, einschlägigen Arbeiten kritisch durch, gewinnen wir notgedrungen den Eindruck, daß eine genauere Vorausberechnung des zeitlichen Temperaturverlaufes fast völlig außerhalb jeder praktischen Möglichkeit liegt. Dies ist aber keineswegs überraschend, da ja schon die genauere Vorausberechnung der Enderwärmung auf größte Schwierigkeiten stößt [1]. Dabei ziehen wir schon in Betracht, daß einige Autoren [2], [3], [4] u. a. m. den meist einfachheitshalber vertretenen Standpunkt, die Maschine als einen einzigen Körper zu betrachten, bereits haben fallen lassen. Die Frage der möglichen Auswertung dieser breiteren Ansätze wurde aber bisher noch nicht genügend weitgehend verfolgt, trotzdem gerade die Beschränkung auf die sogenannte Einkörper-Lösung anscheinend das größte Hindernis für eine erfolgreiche Weiterentwicklung der Berechnungsmethoden darstellt.

¹ Weiterhin nur Erwärmungsverlauf im Gegensatz zur stationären Enderwärmung — weiterhin nur Enderwärmung.

In den letzten Jahren wurde nun der Versuch unternommen, die sogenannte Methode der äquivalenten Wärmequellennetze für die Berechnung der Enderwärmung elektrischer Maschinen weitgehend durchzuarbeiten [5], [6]². Die verhältnismäßig günstigen Ergebnisse, die erzielt wurden und vor allem die weitere Ausbaufähigkeit dieser Methode [1] gaben Anlaß, auf der gleichen Grundlage auch das Problem des Erwärmungsverlaufes in Angriff zu nehmen [7], [8].

In Folgendem wollen wir nun versuchen einen kurzen Abriß der an Hand dieser Methode aufgestellten allgemeinen approximativen Lösung des Erwärmungsverlaufes und deren Anpassung an praktische Erfordernisse zu geben. Um ein möglichst vollständiges Bild sowohl der erzielten Ergebnisse, als auch der praktischen Handhabung zu gewähren, wird auch der Erwärmungsverlauf eines kleinen Induktionsmotors bei Anwärmung, Abkühlung sowie bei intermittierendem Betrieb praktisch berechnet und mit Meßergebnissen verglichen. Da die bei der Vorausberechnung zu leistende Rechenarbeit für die Praxis von ziemlichem Belang ist, sind im Nachtrag auch noch einige Hinweise betreffs der Anwendung von modernen Rechenautomaten resp. elektrischen Netzmodellen³ beigefügt.

1. Einleitende Betrachtungen

Bei der Untersuchung einer Reihe durch Messung ermittelter Anwärmungs- und Abkühlungskurven⁴ [$\vartheta(t)$] hat es sich gezeigt, daß diese bei einer technisch annehmbaren Genauigkeit durch Exponentialreihen mit konstanten Koeffizienten — wie dies bei Ausgleichsvorgängen üblich ist —

$$\vartheta(t) = \Theta_{\infty} - \sum_{v=1}^n \Theta_v e^{-p_v t}, \quad (1)$$

von mindestens zwei bis drei Gliedern der Summe in Gl. (1) dargestellt werden müssen, sollen 10—50% Abweichungen von dem tatsächlichen Verlauf vermieden werden.

Für die verschiedenen Teile der Maschine ergeben sich dabei gleiche Zeitkonstanten (p_v) und verschiedene Konstanten bei den Exponentialen (Θ_v).

Dies zeigt, daß man von einer Lösung des Erwärmungsverlaufes an Hand eines Einkörpermodèles nur im günstigsten Falle mehr als eine grobe Annäherung erwarten kann; und es liegt nahe, in dem System von Funktionen der Form (1), die den Erwärmungsverlauf zumindest angenähert darstellen, die Lösung eines Systems linearer, simultaner Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zu suchen, wie sie sich bei Mehrkörpersystemen ergeben [3].

In diesem Zusammenhang sei noch auf einen wichtigen Umstand hingewiesen. Die Lösung der Enderwärmung und die Lösung des Erwärmungsverlaufes haben einen festen mathematisch-physikalischen Zusammenhang, dem Rechnung getragen werden sollte. Die Enderwärmung müßte nämlich, wie schon der Name besagt, unbeschadet einer bloßen Annäherung, für $t \rightarrow \infty$ mit dem Grenzübergang $\lim_{t \rightarrow \infty} \vartheta(t)$ der bezüglichen zeitabhängigen Lösung identisch sein. Nun hat sich bei der Berechnung der Enderwärmung eine Reihe von „Mehrkörpermethoden“ bewährt, sei es an Hand eines eindimensionalen Wärmeströmungsbildes oder eines Wärmequellennetzes; siehe z. B. [11], wo auch bei eindimensionalem Wärmeströmungsbild schon bloße Teile von Maschinen als zwei resp. drei Stäbe, die thermisch gekoppelt sind, betrachtet werden. Es liegt also auch aus diesem Grunde theoretisch nahe, die Lösung des Problems unbeschadet mathematischer Schwierigkeiten an Hand einer Mehrkörpermethode zu suchen.

² Außer [5], [6] siehe unter [9] und [10] einiges Schrifttum zur Anwendung der Methode der Wärmequellennetze zur Berechnung der Enderwärmung.

³ Modelle des Wärmequellennetzes.

⁴ KESSLER [8], oder LIGHTBAND [4] und unveröffentlichte Messungen des Verfassers an Gleichstrommaschinen.

2. Untersuchung und Bewertung der zur Berechnung der Enderwärmung hauptsächlich benutzten Berechnungsmethoden

Wenn wir die stationäre Wärmeableitung aus der elektrischen Maschine, d. h. aus einem System mehrerer thermisch gekoppelter Körper physikalisch exakt beschreiben wollen, müssen wir, da es sich um isotrope Wärmeleiter handelt, ein System von Differentialgleichungen Poissonschen ($w > 0$) und Laplaceschen Typs ($w = 0$),

$$\lambda \Delta T(x, y, z) = -w, \quad (2)$$

lösen. $T(x, y, z)$ bezeichnet die Temperatur, λ die Wärmeleitzahl und w die spezifische Wärmeerzeugung. Das System besteht aus je einer Gleichung für jeden wesentlichen und unterschiedlichen Teil der Maschine; Statorcupfer, Isolation, Statoreisen usw. mit Randbedingungen, die jeweils für zwei oder mehrere von ihnen gemeinsam sind. Um das Problem der Wärmeableitung überhaupt praktisch lösen zu können, ist es aber unumgänglich nötig von einer einfacheren Formulierung auszugehen.

Dies kann z. B. bewerkstelligt werden, indem wir die Wärmeleitungsgleichungen wie folgt vereinfachen; da in Folge der Rotationssymmetrie bei Maschinen ohne ausgeprägte Pole die Temperaturverhältnisse um jede Nut die gleichen sein sollten, betrachten wir bloß einen einzigen Statorausschnitt mit einer Nut. Die Kupferwicklung in der Nut, deren Temperatur schließlich maßgebend ist, sehen wir als einen homogenen Kupferstab an, dessen Temperaturverlauf in der Querrichtung wir in Anbetracht der Länge der Wicklung vernachlässigen. Desgleichen betrachten wir das Statorpaket als einen Eisenstab, in den der Kupferstab eingelegt ist, usw., usw.

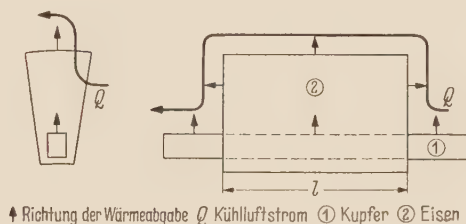


Bild 1.

Wir gelangen auf diese Art zum sogenannten eindimensionalen Wärmeleitungsbild der Maschine Bild 1, das grundsätzlich auch eventuell um Rotoreisen und Kupfer erweitert werden könnte. Die exakte Lösung des Erwärmungsverlaufes ist aber bei eindimensionaler Wärmeströmung schon für den Fall eines einfachen Stabes [12] äußerst kompliziert und das Ergebnis wäre bereits bei diesem einfachen Ansatz technisch viel zu unpraktisch. Der Erwärmungsverlauf für zwei parallel liegende gekoppelte Stäbe (Bild 1) wurde in analytischer Form überhaupt noch nicht gelöst und abgesehen davon hat die eindimensionale Lösung noch gewisse andere Nachteile, wie sie z. B. J. HAK [1] S. 307, 308 aufzeigt.

Eine weitaus günstigere Vereinfachung des mathematischen Problems ergibt sich, wenn die Wärmeleitzahl in den metallischen Wärmequellen im Hinblick auf die der Isolation z. B. in allen Richtungen als praktisch über alle Maße groß angesehen wird. Daraus folgt dann, daß die Temperatur der Wärmequellen als räumlich konstant zu betrachten ist ($\partial T/\partial x = 0$, $\partial T/\partial y = 0$) und wir erhalten mit Hilfe der Randbedingungen von Gl. (2) ein System algebraischer Gleichungen oder bildlich gesprochen ein Wärmequellennetz⁵.

Die mathematischen Schwierigkeiten wären damit zwar behoben (wie wir sehen werden, auch in bezug auf die Lösung des Erwärmungsverlaufes), aber es bleibt natürlich dahingestellt, ob in Anbetracht einer so weitgehenden Vereinfachung und der damit verbundenen Fehler durch allzu ungenaue Formulierung die gewünschten Ergebnisse überhaupt zu erzielen sind. Schon ein einfaches Beispiel, ein Stab, dessen zwei Abschnitte verschieden intensiv gekühlt

⁵ Wir wollen hier aufmerksam machen, daß auch eine modelmäßige Lösung auf dem Wege über das Wärmequellennetz bedeutend einfacher als ein direktes Modellieren ist. Vergleiche z. B. KESSLER [10] und [13].

werden, zeigt ([7], S. 290), daß die völlige Vernachlässigung des inneren Wärmegefälles der Wärmequellen zu beträchtlichen Fehlern führen kann. Um so entstehende Schwierigkeiten zu beheben, gehen wir von einer etwas modifizierten Festlegung des Wärmequellennetzes aus. Aus der formalen Analogie des Fourierschen Wärmeleitungsgesetzes und des Gesetzes der elektrischen Strömung $q = -\lambda \text{ grad } T$, $J = -\sigma \text{ grad } \varphi$ bestimmen wir ähnlich wie dies bei elektrischen Stromleitern geschieht, für die verschiedenen Wärmeleiter in der elektrischen Maschine deren „Wärmeleit- bzw. Wärmeübergangswiderstand“ sowie den „inneren Widerstand“ der Wärmequellen. Wir gelangen so zu einem quasi Ohmschen Gesetz der Wärmeleitung, das die gegenseitige Abhängigkeit von Wärmewiderstand r , Wärmegefälle $\Delta\vartheta (= \vartheta_1 - \vartheta_2$ oder $= \vartheta - \vartheta_0$, das ist die mittlere Erwärmung der Wärmequelle) und Wärmestrom q festlegt;

$$q = \frac{\Delta\vartheta}{r}. \quad (3)$$

Dabei sind die Wärmewiderstände wenigstens in der ersten Annäherung nur von den geometrischen Abmessungen und von den physikalischen Konstanten der bezüglichen Materialien resp. Kühlluftströmungen abhängig.

Dank der verhältnismäßig einfachen Geometrie der aktiven Teile der elektrischen Maschine ist es möglich, alle wesentlichen Wärmewiderstände in der Maschine wenigstens annähernd zu bestimmen. Auf diese Art kann dann die elektrische Maschine thermisch durch ein äquivalentes Wärmequellennetz, das den Wärmewegen der Maschine mehr oder minder gut entspricht, als Mehrkörpersystem dargestellt werden. Den aktiven Materialien entsprechen Wärmequellen, die durch die einzelnen Wärmewiderstände miteinander und mit den Wärmesenken verbunden sind; als Wärmesenken betrachten wir die Kühlluftströmung oder bei Kühlung durch natürliche Konvektion, die umgebende Luft. Wenn wir den Wert der Wärmewiderstände angeben können, können wir, sind die Wärmeverluste = Ergiebigkeit der Wärmequellen bekannt, auch deren mittlere Temperaturen bestimmen. Dabei gelten für das Netz analoge Gesetze wie die KIRCHHOFFSchen bei elektrischen Netzen. Einzelheiten siehe z. B. bei HAK [5], [6] und KESSLER [7], [8].

Die Hauptaufgabe und maßgebend für das Ergebnis dieser Methode ist vor Allem die Bestimmung oder Abschätzung der Wärmewiderstände und der Entwurf des geeigneten Wärmequellennetzes; damit wurde die mathematische Schwierigkeit der Lösung komplizierter und mehrdimensionaler Fälle auf die Bestimmung der Widerstände überführt. In ungünstigen Fällen könnte dies zwar auf das Gleiche hinauslaufen, aber meist ist es möglich, durch theoretische Analyse, Analogie, durch Erfahrung und auf Meßergebnisse gestützt, den Wert der Widerstände mit einer, den Verhältnissen angemessenen Genauigkeit, anzugeben. Dafür sprechen verschiedene praktische, mittels dieser Methode zufriedenstellend gelöste Aufgaben [9], [10]; andererseits harrt aber natürlich noch eine Reihe von Schwierigkeiten der Lösung [1]. Von Vorteil ist auch, daß die Anzahl der zu lösenden Gleichungen, wie schon im Zusammenhang mit der Möglichkeit des Modellierens betont wurde, im Verhältnis zu anderen numerischen Lösungen gering ist. Unter Umständen ist es sogar möglich, die Lösung in analytischer Form anzugeben.

3. Ein Ansatz zur approximativen Lösung des nichtstationären Problems

Auf Grund der Erwägungen des letzten Abschnittes wollen wir voraussetzen, daß die Enderwärmung, wenigstens theoretisch, im Allgemeinen mit zufriedenstellender Genauigkeit berechnet werden kann und daß sich also für jede Maschine ein angemessenes Wärmequellennetz angeben läßt.

Fassen wir die Enderwärmung der einzelnen Wärmequellen ϑ_v , wo v die einzelnen Wärmequellen bezeichnet, zu einer einspaltigen Matrix $\bar{\vartheta}$, die reziproken Wärmewiderstände gemäß ihrer Bezifferung zu einer quadratischen Matrix A und die Verluste, d. h. die Ergiebigkeit der einzelnen Wärmequellen sowie die Temperaturen der einzelnen Wärmesenken zu einer ge-

eigneten einspaltigen Matrix \bar{W} zusammen (siehe Abschnitt 7 Gl. (11) oder [7]); dann können wir das Problem der Bestimmung der Enderwärmung der Netzquellen folgend ausdrücken

$$\mathbf{A} \bar{\vartheta} = \bar{W}. \quad (3a)$$

Jede einzelne Zeile der Matrizengleichung (3a) stellt die Wärmebilanz der mit der Zeile gleichlautend bezifferten Wärmequelle dar, so daß die linke Seite von Gl. (3a) physikalisch als die aus den Wärmequellen abgeführte Wärmemenge bezeichnet werden kann.

Wollen wir nun den Erwärmungsverlauf der Netzquellen ermitteln, so genügt es, außer der in jedem Augenblick aus den Wärmequellen abgeleiteten Wärme $\mathbf{A} \bar{\vartheta}$, noch die im zeitlich veränderlichen Falle zur Anwärmung der Wärmequellen nötige Wärmeleistung, gemäß den ihnen eigenen Wärmekapazitäten $(mc)_v$ zu berücksichtigen. Bei einer einzelnen Wärmequelle erhalten wir für die für die Anwärmung benötigte Wärmeleistung $q_v(t)$, wenn wir mit $T_v(x, y, z; t)$ die Erwärmung im Punkte (x, y, z) zur Zeit t bezeichnen und weiter ϱ die Dichte und c die spezifische Wärme ist

$$dq_v(t) = \varrho c \int \int \int_{V_v} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} T_v(x, y, z; t) \cdot d\tau \right\} dx dy dz = \varrho \cdot c \int \left\{ \frac{\partial}{\partial t} T_v(x, y, z; t) \cdot dV \right\}.$$

Führt man den mittleren Erwärmungsverlauf $\vartheta_v(t)$ im Körper durch Integration über sein ganzes Volumen V_v ein $\vartheta_v(t) = \frac{1}{V_v} \int_{V_v} T_v(x, y, z; t) dV$ ist, da wir die Reihenfolge der Integration und Derivation vertauschen können weiters

$$dq_v(t) = \varrho \cdot c \frac{d}{dt} \left\{ \int_{V_v} T_v(x, y, z; t) dV \right\} dt = \varrho \cdot c V_v \frac{d\vartheta_v(t)}{dt} \cdot dt$$

und es kann allgemein für den Erwärmungsverlauf der Netzquellen geschrieben werden

$$\mathbf{C}_\varrho \frac{d\bar{\vartheta}(t)}{dt} + \mathbf{A} \bar{\vartheta}(t) = \bar{W},$$

oder nach Multiplikation von links mit der zu \mathbf{C}_ϱ reziproken Matrix \mathbf{C}_ϱ^{-1} , wobei $\mathbf{C}_\varrho^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ und $\mathbf{C}_\varrho^{-1} \cdot \bar{W} = \bar{W}^*$ ist;

$$\frac{d\bar{\vartheta}(t)}{dt} = -\mathbf{A}^* \bar{\vartheta}(t) + \bar{W}^*. \quad (4)$$

\mathbf{C}_ϱ ist die Matrix der Wärmekapazitäten des Netzes, deren Determinant von Null verschieden ist. Gl. (4) ist, wie erwartet, ein System linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und die Gleichung genügt auch der Bedingung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\vartheta}(t) = \bar{\vartheta}.$$

Für $t \rightarrow \infty$ ist, sofern Gl. (4) und Gl. (3) eine endliche Lösung haben, $\lim_{t \rightarrow \infty} d\bar{\vartheta}(t)/dt \equiv 0$, so daß Gl. (4) in Gl. (3) übergeht.

Es muß allerdings betont werden, daß die Lösung der Gl. (4), d. h. der Erwärmungsverlauf des äquivalenten Netzes die tatsächlichen Verhältnisse nicht voll widerzugeben vermag.

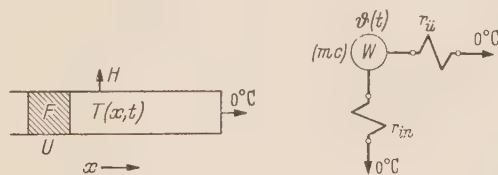


Bild 2.

Zeigen wir dies statt an einem völlig allgemeinen Fall z. B. an dem konkreten Beispiel eines an der Oberfläche gekühlten Stabes Bild 2. Die zeitliche Wärmeleitungsgleichung lautet hier, bei eindimensionaler Wärmeströmung (KESSLER [12])

$$\lambda F \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - \varrho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - U H \cdot T(x,t) = -w_0 F \{1 + \alpha T(x,t)\}, \quad (5)$$

wenn die Wärmeentwicklung im Stab mit α von $T(x, t)$ abhängt; die Anfangs- und Randbedingungen seien $T(x, 0) = 0$; $\left\{ \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right\}_{x=0} = 0$; $T(x, l) = 0$. Führen wir die Integration der Gl. (5) nach x von 0 bis l durch, erhalten wir mit Hilfe der Randbedingungen

$$-\lambda F \left\{ \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right\}_{x=l} + (mc) \frac{d\vartheta(t)}{dt} + SH \vartheta(t) = W_0 \{1 + \alpha \vartheta(t)\}. \quad (6)$$

Dabei ist $(mc) = \rho c V$; $W_0 = w_0 \cdot V$; $S = U \cdot l$, und die Anfangsbedingung $\vartheta(0) = 0$. Nun bedeutet der erste Ausdruck Gl. (6) physikalisch den in der X -Richtung abgeleiteten Wärmestrom (q), der laut Definition Gl. (3) im stationären Falle $q = -\lambda F \left\{ \frac{dT(x)}{dx} \right\}_{x=l} = \frac{\vartheta}{r_{in}}$ ist. ϑ bezeichnet die mittlere Temperatur des Stabes, r_{in} dessen (inneren) Wärmewiderstand in der Längsrichtung und es gilt sichtlich $\left\{ \frac{dT(x)}{dx} \right\}_{x=l} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right\}_{x=l}$. Daraus ergibt sich ohne weiteres, daß Gl. (6) durch Einsetzen von $\vartheta(t)/r_{in}$ und $r_{in} = 1/S H$ (siehe Bild 2) der Gl. (4) für das einfache Netz Abb. 2 entspräche, doch bliebe festzustellen, ob der Gesamtwiderstand $R = 1/R = 1/r_{in} + 1/r_{in} \rightarrow$, wie in Gl. (4) von allen Widerständen schweigend vorausgesetzt wurde, auch wirklich konstant und für jedes t dem, für den Limes $t \rightarrow \infty$ definierten Widerstand, gleich ist.

Es zeigt sich, daß im Allgemeinen zwar der Wert der Wärmewiderstände nicht konstant sein muß (siehe z. B. Nachtrag, Abschn. 10), aber doch in erster Annäherung als konstant betrachtet werden kann. Wir können daher sagen, daß Gl. (4), d. h. der zeitliche Erwärmungsverlauf des äquivalenten Netzes den tatsächlichen Erwärmungsverlauf angenähert darstellt und zwar, wie leicht einzusehen ist, um so besser, je weniger die einzelnen Wärmewiderstände $r = r(t)$ von $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = r = \text{konst.}$ abweichen. Als den tatsächlichen Erwärmungsverlauf betrachten wir dabei die Lösung eines Systems zeitanhängiger Wärmeleitungsgleichungen der Form

$$\Delta T(x, y, z; t) - \frac{\rho \cdot c}{\lambda} \cdot \frac{\partial}{\partial t} T(x, y, z; t) = -\frac{w}{\lambda}, \quad (7)$$

das die thermischen Verhältnisse in der Maschine physikalisch exakt beschreibt. Daß eventuell schon die Werte der Wärmewiderstände in bezug auf die Enderwärmung nur angenähert bekannt sind, wollen wir hier außer acht lassen.

In bezug auf den zeitlichen Verlauf ist die Annäherung um so besser, einen je größeren Wert t wir ins Auge fassen und dann auch noch für ganz kleine Werte von t (siehe Nachtrag).

4. Die allgemeine Lösung des Erwärmungsverlaufes des äquivalenten Wärmequellenetzes

Um die Lösung von Gl. (4) in geeigneter Form durchführen zu können, bestimmen wir eine geeignete Matrix \mathbf{c} durch die die Matrix $-\mathbf{A}^*$ auf ihre Normalform \mathbf{n} überführt wird

$$\mathbf{c}^{-1} \cdot -\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{c} = \mathbf{n}. \quad (8)$$

Setzen wir nun in Gl. (4) $\vartheta(t) = \mathbf{c} \bar{T}(t)$ ein und multiplizieren wir von links mit \mathbf{c}^{-1} , ergibt sich, wenn wir noch $\mathbf{c}^{-1} \bar{W}^*$ mit \bar{M} bezeichnen, wie leicht nachzurechnen ist

$$\frac{d\bar{T}(t)}{dt} = \mathbf{n} \cdot \bar{T}(t) + \bar{M}.$$

Bei dem Ansatz $\bar{T}(t) = \bar{T}_0 e^{nt}$ erhalten wir dann mittels Variation der Konstanten als Lösung von Gl. (4) wofern nur $|\mathbf{A}^*| \neq 0$ ist

$$\bar{\vartheta}(t) = \mathbf{c} \left\{ e^{nt} \left[\int_0^t e^{-n\zeta} \cdot \bar{M} d\zeta + \bar{T}(0) \right] \right\}. \quad (9)$$

Daß Gl. (9) wirklich eine weitgehende allgemeine Lösung darstellt, ist leicht zu zeigen. Erstens ergibt Gl. (9) eine Lösung sowohl für Anwärmung, als auch für Abkühlung, denn sie gilt für

jegliches \bar{W}^* , also auch für $\bar{W}^* \equiv 0$ und für beliebige Anfangsbedingungen $\vartheta(0)$. Auch bleibt die Form der Gl. (9) unverändert, wenn $\bar{W}^* = \bar{W}^*(t)$ eine Funktion der Zeit ist. Es ist dann M durch $M(t) = c^{-1} \bar{W}(t)$ zu ersetzen. Änderungen der Betriebsverhältnisse z. B. bei intermittierendem Betrieb, können durch zwei Lösungen, für die Anwärme und für die Abkühlung durch Einsetzen der bezüglichen Anfangswerte in jeder Periode für beide Vorgänge dargestellt werden usw. Nur ist zu fordern, daß die Elemente von A^* wenigstens annähernd konstant sind, was wir ja vorausgesetzt haben.

Bedenken wir weiter, daß das Integralzeichen vor der Matrix nichts anderes bedeutet, als daß jedes Element von e^{-nt} von 0 bis t zu integrieren ist, sehen wir, daß nach Durchführung der Integration und Multiplikation mit e^{nt} Gl. (9) die Form von Gl. (1) annimmt. Dabei wird die Anzahl der Glieder der Reihe durch die Anzahl der Gleichungen des Systems Gl. (4), d. h. durch die Anzahl der Wärmequellen bestimmt. Untersuchen wir diese Form-Gleichheit etwas näher.

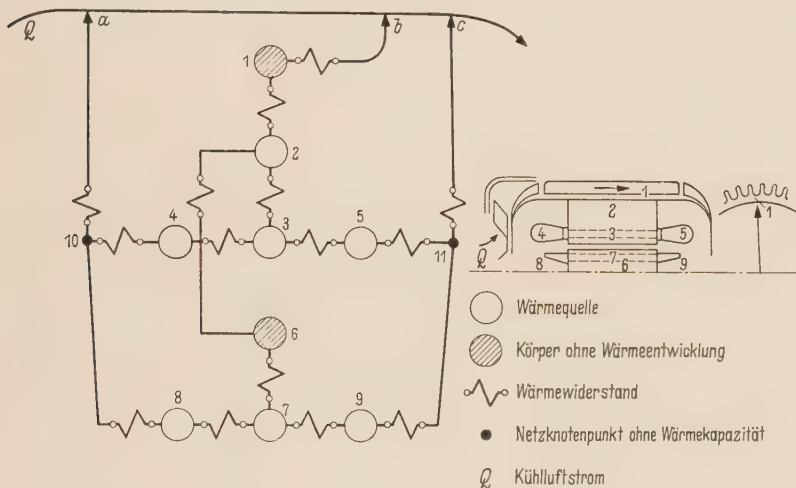


Bild 3.

1 Gußeisengehäuse, 2 Statorbleche, 3 Wicklung in der Nut, 4, 5 Wicklungsköpfe, 6 Rotoreisen, 7 Kupferwicklung oder Kurzschlußkäfig, 8, 9 Wicklungsköpfe oder Kurzschlußbringe mit Kühlschaufeln, 10, 11 Luft zwischen Lagerschild und Wicklungsköpfen.

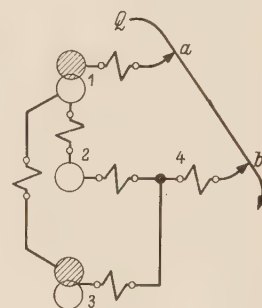


Bild 4.

1 Statorbleche und Gehäuse, 2 Statorwicklung, 3 Rotoreisen und Kupfer, 4 Luft zwischen Wicklungsköpfen und Lagerschild.

Gingen wir bei der praktischen Bestimmung des Erwärmungsverlaufes z. B. bei Induktionsmotoren von dem der Berechnung der Enderwärmung zugrundeliegendem Netzbild (Bild 3) aus, ergäbe sich als Lösung eine aus neun Gliedern bestehende Reihe. Vergleichen wir dieses Ergebnis mit Meßergebnissen, die außer Θ_∞ höchstens drei Glieder der Reihe Gl. (1) ergeben⁶, ist, da beide Ergebnisse den gleichen Erwärmungsverlauf mit nicht allzu unterschiedlicher Genauigkeit approximieren, klar, daß in diesem Falle in Gl. (9) die Glieder vom dritten resp. vierten Glied an nur einen technisch belanglosen Beitrag zum Lösungsverlauf darstellen können. Es sollte darum auch ein Gleichungssystem — wir wollen es ein ‚Ersatzgleichungssystem‘ nennen — von zwei bis drei Differentialgleichungen geben, dessen Lösung gerade die einfachere, durch Messung ermittelte Reihe liefert. Denn ist $\bar{\vartheta}(t)$ in der Form Gl.(1) gegeben, kann man zweifelsohne aus $\bar{\vartheta}(t)$ und $d\bar{\vartheta}/dt$ eine Differentialgleichung der Form Gl. (4) bilden, sofern die Determinante der Koeffizienten Θ_i nicht Null ist.

Da zw. schen den beiden Lösungen, im technischen Maßstab gesehen, kein allzu wesentlicher Unterschied besteht, können wir desgleichen von den bezüglichen Differentialgleichungen erwarten. Demgemäß können auch die den Gleichungen zugrundeliegenden Wärmequellen-netze in ihren Eigenschaften nicht wesentlich von einander abweichen, doch müßte das Ersatznetz aus entsprechend weniger Wärmequellen bestehen.

⁶ Siehe Abschn. 1 oder [8].

Haben wir also auch in Gl. (9) eine Lösung des Erwärmungsverlaufes gefunden, die eine annehmbare Annäherung der exakten Lösung liefert, so müssen wir doch noch, um unser eigentliches Ziel zu erreichen, vornehmlich aus praktischen Gründen, einen Weg zur Vereinfachung⁷ des der Enderwärmung zugrundeliegenden Netzbildes anstreben, um ein passend vereinfachtes Wärmequellennetz, daß dem Ersatznetzbild entspräche, zu gewinnen.

5. Der Entwurf eines vereinfachten Wärmequellennetzes zur praktischen Bestimmung des Erwärmungsverlaufes

Bei der praktischen Suche nach einem geeigneten vereinfachten Wärmequellennetz wollen wir wieder von dem für die Enderwärmung maßgebenden Netzbild ausgehen, da dieses ja mit dem gesuchten „verwandt“ sein muß und als bereits festliegend und bestimmt angesehen werden kann. Bezüglich seiner Bestimmung siehe insbesondere HAK [1] (Auf Probleme, die mit der Berechnung der Enderwärmung zusammenhängen, wollen wir hier nicht weiter eingehen). Dabei wollen wir festhalten, daß sich die „Verwandtschaft“ natürlich vor allem darin manifestieren muß, daß die mittleren Enderwärmungen der Wärmequellen des vereinfachten Wärmequellennetzes sich gegenüber den ursprünglichen Werten nicht wesentlich ändern dürfen.

Ein Anhaltspunkt für den praktisch einzuschlagenden Weg bietet sich nun an Hand folgender Erwägungen: Ist in einem Wärmequellennetz der Wert eines Widerstandes, der zwei Wärmequellen verbindet, verhältnismäßig gering und eventuell die Wärmekapazität einer der Wärmequellen im Verhältnis zur anderen ebenfalls klein, dann ändern sich die Parameter des Netzes sicher nur wenig, wenn wir die beiden Wärmequellen zu einer einzigen zusammenfassen⁸. Ist weiter der Wert eines Widerstandes wiederum im Verhältnis sehr groß, ändert sich praktisch nichts, wenn der Widerstand weggelassen wird. Treffen die besagten Umstände bei einem Wärmequellennetz zu, bietet sich die Möglichkeit, das volle Netz zu vereinfachen. Da in Wirklichkeit natürlich das Verhältnis zu allen Widerständen eine Rolle spielt usw., lohnt es aber nicht, auf mathematischem Wege quantitative Regeln oder Maßstäbe zu suchen, außer der Kontrolle der Endtemperaturen bei dem versuchsweise vereinfachten Netz. Auf diese Art könnten wir unter günstigen Umständen offensichtlich zu einem vereinfachten Ersatznetz gelangen, dessen Erwärmungsverlauf nicht allzusehr von dem des ursprünglichen Netzes abweicht und das, wie gefordert, in dem betrachteten Fall aus zwei bis drei oder höchstens vier Quellen bestünde. Praktische Untersuchungen in dieser Richtung ergaben [8], daß bei einer Vereinfachung wirklich die größeren Zeitkonstanten verschwinden (Zahlentafel 1), daß aber insbesondere die letzte und auch eventuell die vorletzte Zeitkonstante bei dem Ersatznetz unter Umständen beträchtlich von dem ursprünglichen Werte abweicht. Dabei wurde der Forderung nach Einhaltung entsprechender Enderwärmungen eventuell auch durch eine Korrektur der ursprünglichen Werte der Widerstände Rechnung getragen. Es scheint, daß zur Berechnung von zwei bis drei Messungen entsprechenden Zeitkonstanten, ein Ersatznetz von mindestens drei oder vier Wärmequellen nötig sein wird.

Zahlentafel 1.

Anzahl der Quellen im Ersatznetzbild	I	II	III	IV
Zeitkonstanten	0,0482	0,0410 0,231	0,0395 0,245	0,0414 0,251 1,19 2,60

⁷ Gehen wir den entgegengesetzten Weg und versuchen wir das Ergebnis Gl. (9) zu verbessern, indem wir das Netz verfeinern, so gelangen wir schließlich zu einem Punkt, wo Gl. (4) in ein aus Gl. (7) abgeleitetes Differenzgleichungssystem übergeht.

⁸ Die Änderung der Zeitkonstanten in einem Netz mit zwei Wärmequellen verglichen mit dem Wert der Zeitkonstanten bei zusammengelegten Quellen ist in [8] ganz allgemein berechnet worden. Es ergab sich, daß von einem gewissen Verhältnis des Zahlenwertes des die beiden Quellen verbindenden Widerstandes zu den anderen usf. an, sich wirklich praktisch nichts ändert, wenn man die beiden Quellen zusammenfaßt.

6. Praktische Ergebnisse

Entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 5 wurde z. B. für die Berechnung der Zeitkonstanten einer Reihe kleinerer, völlig gekapselter Induktionsmotoren folgendes, in Bild 4⁹ dargestelltes Ersatznetzbild benutzt. Das volle, für die Berechnung der Enderwärmung benutzte Netzbild¹⁰ zeigt Bild 3.

Die an Hand des angeführten Ersatznetzbildes mit nur drei Wärmequellen durchgeführten Berechnungen ergaben die in Bild 5 mit den gemessenen Werten verglichenen Werte der Zeitkonstanten. Als Kontrolle für die Güte der Abschätzung der Widerstände wurde die berechnete Enderwärmung des Ersatznetzes genommen. Es wurde festgestellt, daß Abweichungen von mehreren Graden, also Abweichungen der Werte der Widerstände, denn die Verluste, Wärmekapazitäten usw. sind ja relativ gut bekannt, schon zu beträchtlichen Abweichungen von den durch Messung ermittelten Werten der Zeitkonstanten führten (siehe Zahlentafel 2). Bei der Beurteilung der angeführten Zahlen ist zu bedenken, daß die letzte und größte Zeitkonstante (hier 0,230) aus Meßergebnissen bestimmt wurde und zwar an Hand einer graphischen Mittelung in semilogarithmischem Maßstab. Die Bestimmung weiterer Koeffizienten wurde bloß mit Rücksicht auf die Genauigkeit der Meßergebnisse abgebrochen. Für den in Zahlentafel 2 angeführten Fall z. B. wäre der dritte Koeffizient Θ_3 bereits bedeutend kleiner als der vorausgesetzte Meßfehler. Die weitere Aufspaltung von Θ_2 und p_2 würde ein kleineres p_2 und ein einigemal größeres p_3 je nach den Umständen ergeben, was mit den berechneten Ergebnissen gut übereinstimmen würde.

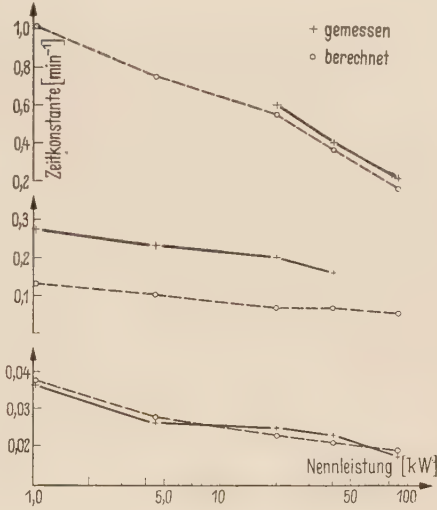


Bild 5.
Zeitkonstanten bei Anwärmung.

Zahlentafel 2.

	$\vartheta_{\text{Cu stat}}$	$\vartheta_{\text{Fe stat}}$	$\vartheta_{\text{Cu rot}}$	p_1	p_2	p_3
gemessen	65,0	39,0 *	83,0	— 0,0269	— 0,230	—
berechnet	60,5	45,7	77,8 **	— 0,0276	— 0,102	— 0,745
	68,0	58,3	80,7	— 0,0193	— 0,0975	— 0,740
	86,0	69,0	96,0	— 0,0153	— 0,0900	— 0,750

* Erwärmung der Oberfläche. Mittlere Erwärmung ca. 5—6° C höher zu nehmen.
** Mittlere Erwärmung des Rotors.

Es sei noch hinzugefügt, daß ein auf nur vier Wärmequellen vereinfachtes Ersatznetz, bestehend aus Stator und Rotor, Eisen und Kupfer auch richtig drei annehmbare Werte der Zeitkonstanten lieferte (p_1 , p_2 und p_3), wohingegen eine etwas gewaltsame Vereinfachung auf zwei Wärmequellen keinen einzigen annehmbaren Wert ergab. An Hand des Ersatznetzbildes von drei Wärmequellen konnten auch je zwei Zeitkonstanten bei Abkühlung, Über- oder Unterbelastung der Maschine usf. mit relativ gutem Ergebnis berechnet werden.

7. Vorausberechnung des zeitlichen Erwärmungsverlaufs eines kleinen Induktionsmotors bei Anwärmung und Abkühlung

Es soll der Erwärmungsverlauf des völlig gekapselten 4,5 kW Induktionsmotors aus Zahlentafel 1, [8] berechnet werden. Als Ausgangspunkt soll uns das Wärmequellennetz Bild 3 sowie das Ersatznetz Bild 4 dienen.

⁹ Bild 3, 4, 5 und Zahlentafel 1 sowie 2 sind [8] entnommen.
¹⁰ Vergleiche auch HAK [1] Bild 6, 7.

Werden nämlich die Zahlenwerte der Wärmewiderstände, die Wärmekapazitäten usf. für das Netz Bild 3 bestimmt, zeigt sich, daß der innere Wärmewiderstand der Statorwicklung und des Kurzschlußkäfigs des Läufers einen bedeutend kleineren Wert als die anderen Wärmewiderstände haben. Auch der Wärmewiderstand zwischen dem Statorblechpaket und dem Gußgehäuse, sowie zwischen Kurzschlußkäfig und Rotorblechen ist, wenn auch nicht ausgesprochen, so doch merklich kleiner, als die übrigen Widerstände. Wenn wir den Wert der genannten Wärmewiderstände vernachlässigen und weiters die Wärmeübergangswiderstände von den Wickelköpfen resp. von den mit Kühlschaufeln versehenen Kurzschlußringen zusammenfassen, erhalten wir das Ersatznetzbild Bild 4.

Da die an Hand dieses Netzbildes berechnete Enderwärmung bereits merklich sowohl von den Werten, die sich für das Netzbild Bild 3 ergeben als auch von der durch Messung ermittelten Wirklichkeit abweicht, wurde der Wert des Widerstandes r_{1a} und r_{13} (Bild 4) korrigiert, um die Vernachlässigung der Widerstände r_{12} und r_{67} (Bild 3) aufzuwiegen. Für das Ersatzbild Bild 4 wurden so folgende Werte bestimmt:

$$\left. \begin{array}{l} r_{1a} = 0,0263 \\ r_{12} = 0,0465 \\ r_{13} = 0,2200 \\ r_{23} = 0,1250 \\ r_{24} = 0,3120 \\ r_{4b} = 0,6700 \end{array} \right\} \text{ } ^\circ\text{C/W} \quad \left. \begin{array}{l} W_1(\text{Fe}) = 160 \\ W_{02}(\text{Cu stat}) = 280 \\ W_{03}(\text{Cu rot}) = 150 \\ (mc)_1 = 2,24 \cdot 10^4 \\ (mc)_2 = 2,47 \cdot 10^3 \\ (mc)_3 = 5,17 \cdot 10^3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} W \\ \frac{W/\text{sek}}{^\circ\text{C}} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Schätzungswerte:} \\ \vartheta_a = 1,8^\circ\text{C} \\ \vartheta_b = 4,5^\circ\text{C} \\ \alpha = 3,93 \\ \cdot 10^{-3}/^\circ\text{C}^{11} \end{array} \right\} \quad (10)$$

Berechnen wir nun die Enderwärmung konkret aus $A \bar{\vartheta} = \bar{W}$, d. h.

$$\left(\begin{array}{cccc} \left(\frac{1}{r_{1a}} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{13}} \right) & -\frac{1}{r_{12}} & -\frac{1}{r_{13}} & 0 \\ -\frac{1}{r_{12}} & \left(\frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{24}} - \alpha W_{02} \right) & 0 & -\frac{1}{r_{24}} \\ -\frac{1}{r_{13}} & 0 & \left(\frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{34}} - \alpha W_{03} \right) & -\frac{1}{r_{34}} \\ 0 & -\frac{1}{r_{24}} & -\frac{1}{r_{34}} & \left(\frac{1}{r_{4b}} + \frac{1}{r_{24}} + \frac{1}{r_{34}} \right) \end{array} \right) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \\ \vartheta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1 + \frac{\vartheta_a}{r_{1a}} \\ W_{02} \\ W_{03} \\ 0 + \frac{\vartheta_b}{r_{4b}} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Dazu setzen wir die Zahlenwerte (10) in (11) ein; wir erhalten

$$A = \begin{pmatrix} 64,0 & -21,5 & -4,5 & 0 \\ -21,5 & 28,4 & 0 & -8,0 \\ -4,5 & 0 & 7,1 & -3,2 \\ 0 & -8,0 & -3,2 & 12,7 \end{pmatrix}; \quad \bar{W} = \begin{pmatrix} 228,4 \\ 280,0 \\ 150,0 \\ 6,7 \end{pmatrix} \quad (12)$$

und wenn wir das Gleichungssystem auflösen, ergeben sich die folgenden, annehmbaren Werte

	ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3	ϑ_4
berechnet	17,9	32,7	47,4	33,0
gemessen	18,0	33,5	45—50	—

¹¹ Die Temperatur der Umgebung und der in die Maschine eintretenden Luft ist 20°C . Auf diese Temperatur bezieht sich auch W_{02} , W_{03} und α .

Um den *Erwärmungsverlauf* zu berechnen, stellen wir nun Gl. (4) zusammen. Wir erhalten nur drei Differentialgleichungen, da dem Knotenpunkt „4“ praktisch keine Wärmekapazität zugeschrieben wird (Luft), mit einer Nebenbedingung, die durch Umformung, wie folgt, explizit aus (12), vierte Zeile, ausgedrückt werden kann.

$$\vartheta_4 = 0,531 + 0,630 \vartheta_2 + 0,252 \vartheta_3. \quad (13)$$

Nach Einsetzen von (13) für ϑ_4 in (12) haben wir

$$A = \begin{pmatrix} 64,0 & -21,5 & -4,5 \\ -21,5 & 23,36 & -2,02 \\ -4,5 & -2,02 & 6,29 \end{pmatrix}; \quad \bar{W} = \begin{pmatrix} 228,4 \\ 284,2 \\ 151,7 \end{pmatrix}; \quad C_0 = \begin{pmatrix} 2,24 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 2,47 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 5,17 \cdot 10^3 \end{pmatrix},$$

was dann weiter

$$A^* = \begin{pmatrix} 2,857 \cdot 10^{-3} & -9,598 \cdot 10^{-4} & -2,009 \cdot 10^{-4} \\ -8,704 \cdot 10^{-3} & 9,457 \cdot 10^{-3} & -8,178 \cdot 10^{-4} \\ -8,704 \cdot 10^{-4} & -3,907 \cdot 10^{-4} & 1,217 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}; \quad \bar{W}^* = \begin{pmatrix} 1,020 \cdot 10^{-2} \\ 1,151 \cdot 10^{-1} \\ 2,934 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix}$$

ergibt.

Die Eigenwerte der Matrix $-A^*$ ermitteln wir am einfachsten, indem wir die charakteristische Determinante $|-A^* + pE|$ ausmultiplizieren und die Wurzeln des Polynoms z. B. an Hand der GRAEFFESchen Methode bestimmen

$$D(p) = |-A^* + pE| = p^3 - 1,3531 \cdot 10^{-2} p^2 + 3,3156 \cdot 10^{-5} p - 1,8782 \cdot 10^{-8} = 0$$

$$p_1 = -1,042 \cdot 10^{-2}, \quad p_2 = -2,169 \cdot 10^{-3}, \quad p_3 = -8,306 \cdot 10^{-4}$$

oder in Minuten ausgedrückt

$$p_1 = -0,623, \quad p_2 = 0,130 \quad \text{und} \quad p_3 = -0,0489.$$

Nun bestimmen wir noch die Matrix c , die die Matrix $-A^*$ auf die kanonische Normalform transformiert, indem wir (8) umformen

$$-A^* \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & & \\ & & \end{pmatrix} = c \cdot n = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1,042 \cdot 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & -2,169 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & -8,306 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}.$$

Die sich durch Ausmultiplizieren ergebenden drei mal drei homogenen Gleichungen für $c_{\mu\nu}$ lösen wir, wobei wir willkürlich $c_{11} = 1$, $c_{12} = 1$ und $c_{13} = 1$ bestimmen. Wir erhalten

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -7,9310 & 0,9923 & 1,3515 \\ 0,2421 & -1,3203 & 3,6298 \end{pmatrix} \quad \text{und hernach} \quad c^{-1} = \begin{pmatrix} 0,1200 & -0,1103 & 0,0080 \\ 0,6519 & 0,0755 & -0,2069 \\ 0,2280 & 0,0348 & 0,1988 \end{pmatrix}.$$

Führen wir nun $\bar{M} = c^{-1} \cdot \bar{W}^*$ in Gl. (9) ein und führen wir die Matrizenoperationen, die die Gleichung vorschreibt, aus, erhalten wir vorerst

$$\bar{T}(t) = e^{nt} \cdot \int_0^t e^{-n\zeta} \cdot \bar{M} d\zeta = \begin{pmatrix} -1,0785 (1 - e^{-1,042 \cdot 10^{-2} t}) \\ 4,2124 (1 - e^{-2,169 \cdot 10^{-3} t}) \\ 14,6390 (1 - e^{-8,306 \cdot 10^{-4} t}) \end{pmatrix}$$

und schließlich aus $\bar{\vartheta}(t) = c \cdot \bar{T}(t)$ als Lösung des zeitlichen Erwärmungsverlaufs

$$\vartheta_1(t) = 17,77 + 1,08 \cdot e^{-1,048 \cdot 10^{-2} t} - 4,21 \cdot e^{-2,169 \cdot 10^{-3} t} - 14,64 \cdot e^{-8,306 \cdot 10^{-4} t},$$

$$\vartheta_2(t) = 32,52 - 8,55 \cdot e^{-1,048 \cdot 10^{-2} t} - 4,18 \cdot e^{-2,169 \cdot 10^{-3} t} - 19,78 \cdot e^{-8,306 \cdot 10^{-4} t},$$

$$\vartheta_3(t) = 47,31 + 0,26 \cdot e^{-1,048 \cdot 10^{-2} t} + 5,56 \cdot e^{-2,169 \cdot 10^{-3} t} - 53,14 \cdot e^{-8,306 \cdot 10^{-4} t}.$$

Fassen wir nun den *Abkühlungsvorgang* ins Auge, so ist zu bedenken, daß die Kühlluftströmung entfällt, so daß sich die meisten Wärmewiderstände bedeutend vergrößern

$$\begin{aligned} r_{1a} &= 0,333, & r_{24} &= 0,357, & W_1 &= W_2 = W_3 = 0, \\ r_{12} &= 0,046, & r_{34} &= 1,060, & \vartheta_a &= \vartheta_b = 0, \\ r_{13} &= 0,476, & r_{4b} &= 2,500, \end{aligned}$$

Bestimmen wir bei gleichem Rechnungsvorgang wie bei der Berechnung des Erwärmungsvorganges die Eigenwerte der Matrix $-\mathbf{A}^*$, erhalten wir

$$p_1 = -1,002 \cdot 10^{-2}, \quad p_2 = -6,782 \cdot 10^{-4} \quad \text{und} \quad p_3 = -1,0863 \cdot 10^{-4}$$

sowie

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -9,2021 & 0,8840 & 1,0059 \\ -0,0766 & -3,6182 & 1,2094 \end{pmatrix}.$$

In Gl. (9) ist $\bar{M} \equiv 0$, wohingegen die Anfangstemperaturen gegeben sind

$$\bar{\vartheta}(0) = \begin{pmatrix} 17,77 \\ 32,52 \\ 47,31 \end{pmatrix} = \mathbf{c} \cdot \bar{T}(0).$$

Lösen wir diese Gleichung nach den unbekannten Elementen der einspaltigen Matrix $\bar{T}(0)$ auf, erhalten wir nach Einsetzen von $\bar{T}(0)$ in $\mathbf{c} \cdot e^{nt} \cdot \bar{T}(0)$ die gesuchten Beziehungen für die Abkühlungskurven

$$\begin{aligned} \vartheta_1(t) &= -1,37 \cdot e^{-1,002 \cdot 10^{-2}t} - 5,04 \cdot e^{-6,782 \cdot 10^{-4}t} + 24,19 \cdot e^{-1,089 \cdot 10^{-4}t}, \\ \vartheta_2(t) &= 12,64 \cdot e^{-1,002 \cdot 10^{-2}t} - 4,46 \cdot e^{-6,782 \cdot 10^{-4}t} + 24,32 \cdot e^{-1,089 \cdot 10^{-4}t}, \\ \vartheta_3(t) &= -0,11 \cdot e^{-1,002 \cdot 10^{-2}t} + 18,24 \cdot e^{-6,782 \cdot 10^{-4}t} + 29,25 \cdot e^{-1,089 \cdot 10^{-4}t}. \end{aligned}$$

In Bild 6 sind sowohl die durch Messung bestimmten, als auch die berechneten Erwärmungs- und Abkühlungskurven eingetragen. Bei dem Vergleich der beiden Ergebnisse ist zu

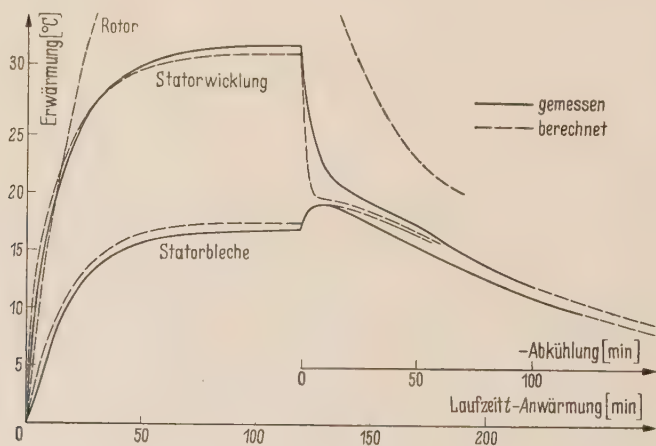


Bild 6.

bedenken, daß nicht nur die berechneten Kurven mit einem Fehler behaftet sind, sondern auch die durch Messung ermittelten. Mit einer näheren Analyse der Meßfehler wollen wir uns hier aber nicht beschäftigen, sondern uns mit einer Schätzung zufrieden geben — für kleine Zeiten rund 7%, weiteres dann abnehmend auf 3–4%.

Da natürlich die Abstimmung der Widerstände entsprechend der Enderwärmung nicht völlig eindeutig ist — bei verschiedenen Werten der Widerstände können sich die gleichen Enderwärmungen ergeben — sind die Korrekturen in gewissem Grade willkürlich. Es wurden darum versuchsweise noch einige andere Alternativen in Erwägung gezogen, indem die Werte der Widerstände innerhalb gewisser wahrscheinlicher Schranken geändert wurden und deren Lösung dann je nach dem, bessere oder weniger gute Annäherungen ergaben (siehe z. B. Bild 7).

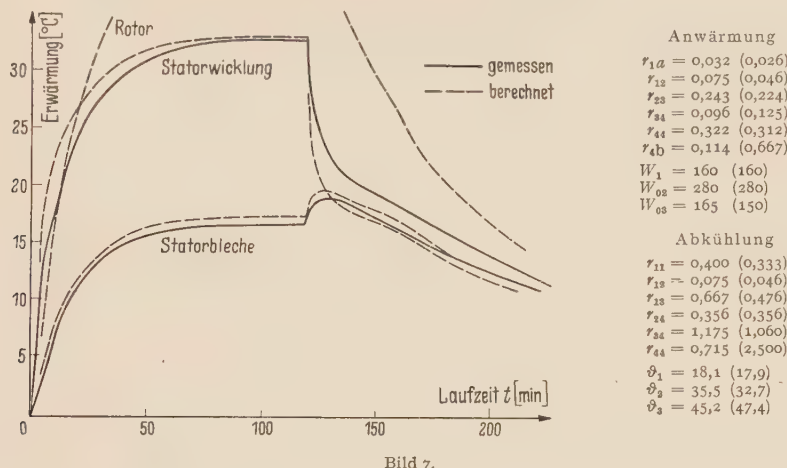


Bild 7.

8. Berechnung des Erwärmungsverlaufes bei intermittierendem Betrieb

Soll noch der Temperaturverlauf bei intermittierendem Betrieb berechnet werden, ist zunächst nötig, den Erwärmungsverlauf für beliebig gegebene Anfangstemperaturen zu bestimmen. Zu diesem Zwecke gehen wir von dem zweiten Ausdruck Gl. (9) aus. Es ergibt sich $\{\mathbf{c} \cdot e^{nt} \bar{T}(0)\}_{t=0} = \bar{\vartheta}(0)$ wobei $\bar{\vartheta}(0)$ die einspaltige Matrix der Anfangstemperaturen ist, die wir nun ganz allgemein auffassen müssen. Da $\bar{T}(0) = \mathbf{c}^{-1} \bar{\vartheta}(0)$ ist, erhalten wir ohne Weiteres

$$T_1(0) = 0,1200 \vartheta_1(0) - 0,1103 \vartheta_2(0) + 0,0080 \vartheta_3(0),$$

$$T_2(0) = 0,6519 \vartheta_1(0) + 0,0755 \vartheta_2(0) - 0,2069 \vartheta_3(0),$$

$$T_3(0) = 0,2280 \vartheta_1(0) + 0,0348 \vartheta_2(0) + 0,1988 \vartheta_3(0).$$

Im gleichen Sinne setzen wir für den Abkühlungsverlauf anstatt $\bar{\vartheta}'(0) = (17,77 \ 32,52 \ 47,31)$ allgemein $\bar{\vartheta}'(0) = [\vartheta_1(0) \ \vartheta_2(0) \ \vartheta_3(0)]$ und erhalten aus $\mathbf{c} \bar{T}(0) = \bar{\vartheta}(0)$ (\mathbf{c} für die Abkühlung!) z. B. an Hand der CRAMERSchen Regel

$$T_1(0) = 0,0960 \vartheta_1(0) - 0,0982 \vartheta_2(0) + 0,0027 \vartheta_3(0),$$

$$T_2(0) = 0,2280 \vartheta_1(0) + 0,0230 \vartheta_2(0) - 0,2077 \vartheta_3(0),$$

$$T_3(0) = 0,6761 \vartheta_1(0) + 0,0752 \vartheta_2(0) + 0,2050 \vartheta_3(0).$$

Setzen wir für $\bar{T}(0)$ jeweils die jetzt berechneten Werte für Anwärmungs- und Abkühlungsvorgang ein, erhalten wir die recht umfangreichen Ausdrücke für den berechneten Erwärmungsverlauf bei intermittierendem Betrieb

$$\begin{aligned} \vartheta_1(0) &= 17,77 + [1,08 + 0,1200 \vartheta_1(0) - 0,1103 \vartheta_2(0) + 0,0080 \vartheta_3(0)] e^{-1,002 \cdot 10^{-2} t} \\ &\quad - [4,25 - 0,6519 \vartheta_1(0) - 0,0755 \vartheta_2(0) + 0,2069 \vartheta_3(0)] e^{-6,782 \cdot 10^{-4} t} \\ &\quad - [14,64 - 0,2280 \vartheta_1(0) - 0,0348 \vartheta_2(0) - 0,1988 \vartheta_3(0)] e^{-1,086 \cdot 10^{-4} t}, \\ \vartheta_2(0) &= 32,52 - [\dots \text{usf.}, \end{aligned}$$

wobei wir jeweils bei der Anwärmung und Abkühlung für $\bar{\vartheta}(0)$ die bei vorhergehender Abkühlung oder Anwärmung gerade erreichten Werte einzusetzen haben.

Wollen wir uns mit der Berechnung der Endtemperaturen der einzelnen Zyklen begnügen, dann setzen wir die Laufzeit (z. B. 12 min) und Stillstandszeit (z. B. auch 12 min) in die oben angedeuteten Ausdrücke für Anwärmung resp. Abkühlung ein, so daß wir Ausdrücke folgender Art erhalten

$$\begin{aligned}\vartheta_{1mx} &= 8,385 + 0,239 \vartheta_{1mn} + 0,033 \vartheta_{2mn} + 0,083 \vartheta_{3mn}, \\ &\vdots \\ \vartheta_{1mn} &= 0,772 \vartheta_{1mx} + 0,084 \vartheta_{2mx} + 0,0625 \vartheta_{3mx} \quad \text{usw.}\end{aligned}$$

Aus diesen sich derart ergebenden Gleichungen, hier sechs, ist es dann auch möglich die Enderwärmung bei intermittierendem Betrieb zu berechnen; hier

$$\left. \begin{aligned}\vartheta_{1mx} &= 13,4 \\ \vartheta_{2mx} &= 25,8 \\ \vartheta_{3mx} &= 33,7\end{aligned} \right\} ^\circ \text{C} \quad \left. \begin{aligned}\vartheta_{1mn} &= 14,4 \\ \vartheta_{2mn} &= 14,6 \\ \vartheta_{3mn} &= 27,6\end{aligned} \right\} ^\circ \text{C}.$$

In Bild 8 sind die gemessenen und berechneten Erwärmungskurven für intermittierendem Betrieb verglichen.

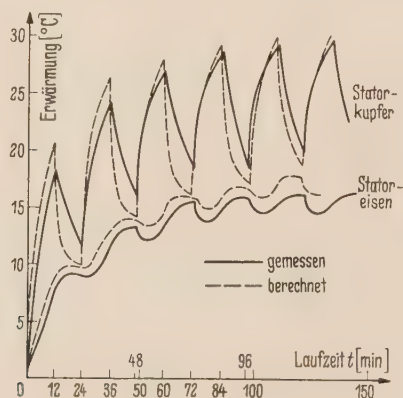


Bild 8.

9. Bewertung der Berechnungsergebnisse und Schlußfolgerungen

Die in den Bildern 6 bis 8 graphisch dargestellten Rechenergebnisse zeigen, daß der, für ein Ersatznetzbild, das in bezug auf die Enderwärmung angenähert richtige Ergebnisse liefert, berechnete Anwärmungsverlauf in verhältnismäßig guter Übereinstimmung mit den Messungen ermittelt werden konnte (Bild 6). Dabei ist zu bedenken, daß die Temperatur des Rotors nur beiläufig und die des Netzknotenpunktes „4“ überhaupt nicht gegeben war. Daß dieses Resultat nicht auf einem bloßen Zufall beruht, zeigt die bis zu einem gewissen Grade in den Werten der Widerstände für das gleiche Netzbild unterschiedliche Alternative Bild 7, sowie weitere, nicht angeführte Ergebnisse. Die Abkühlungskurven, bei denen keinerlei Anlehnung an die Enderwärmung möglich ist, stimmen schon weniger gut mit den Messungen überein (Bild 6 und 7), wenn auch prinzipiell eine gute Übereinstimmung der Form des Verlaufes nach zweifelsohne besteht (Bild 7).

Desgleichen kann in Anbetracht der Schwierigkeit des Problems das Resultat für den intermittierenden Betrieb (Bild 8) als recht gut angesehen werden. Aus Bild 8 ist deutlich abzulesen, daß die Abkühlungskurven weniger genau sind und daß, wären sie zutreffender berechnet, die Übereinstimmung mit den Meßergebnissen wohl hier noch weitaus besser wäre. Demgegenüber weist der aus den durch Messung ermittelten Anwärmungs- und Abkühlungskurven auf die übliche Art konstruierte Erwärmungsverlauf für den intermittierenden Betrieb Bild 9, zumal beim Eisen, einen im Detail den Tatsachen widersprechenden Verlauf auf.

Wie schon in Abschnitt 6 angeführt wurde, konnten auch die Werte der Zeitkonstanten für Maschinen einer fortschreitenden Leistungsreihe gleicher Bauart (Bild 5) recht gut bestimmt werden. Dabei sei nochmals auf die Tatsache verwiesen, daß z. B. bei einem auf nur vier Wärmequellen vereinfachten Ersatznetz bild für das Netz Bild 3 alle drei durch Messung ermittelten Zeitkonstanten mit annehmbarer Genauigkeit rechnerisch bestimmt werden konnten.

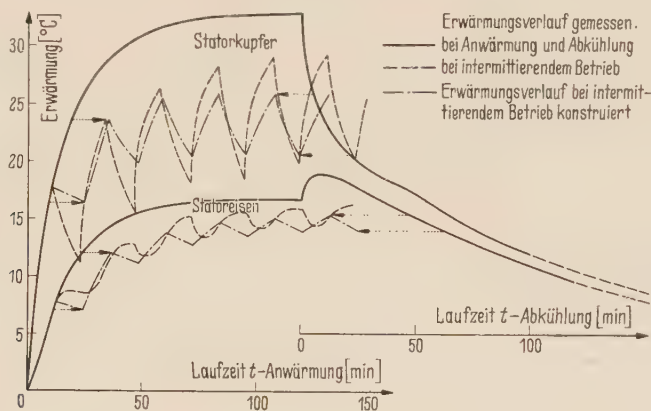


Bild 9.

Ohne die Schwierigkeiten, die noch zu überwinden bleiben, bevor von einer richtiggehenden Vorausberechnung die Rede sein kann, unterschätzen zu wollen, können die angeführten praktischen Ergebnisse doch dahingehend bewertet werden, daß eine zunächst beschränkte Vorausberechnung an Hand der angegebenen allgemeinen Lösung immerhin im Bereich des Möglichen liegt; beschränkt in dem Sinne, daß die Parameter des Wärmequellennetzes, hauptsächlich die Werte der Wärmewiderstände, die den Ausgangspunkt der Vorausberechnung bilden, derzeit noch nicht allein an Hand von Konstruktions- und Rechnungsunterlagen genügend verlässlich bestimmt werden können. Es können zwar einige einzelne günstige Ergebnisse nicht als ein erbrachter, allgemein gültiger Beweis hierfür angesprochen werden, die Beispiele zeigen aber immerhin, daß bei der angewandten Methode das thermische Verhalten der Maschine auf dem Rechnungswege in den wichtigsten Zügen erfaßt werden konnte, wie dies an Hand der Erwärmungen Abschnitt 2—5 auch erwartet werden konnte.

Hinsichtlich des etwas anspruchsvolleren Rechnungsganges, der sich bei der praktischen Anwendung ergab, könnte sicher in Zukunft bei der Erlangung einiger Erfahrung und Übung und bei Benutzung moderner Rechenmaschinen und Modellen [14] soweit mit Verbesserungen und Vereinfachungen gerechnet werden, daß die zu leistende Rechenarbeit kein Hindernis für die praktische Vorausberechnung bilden müßte. Denn auch wenn die praktische Seite der Lösung von Mehrkörperproblemen — und das Wärmequellennetz stellt ein Mehrkörpersystem dar — sicherlich einer der Gründe war, warum man dieser Lösung auswich, ist dieser Schritt doch im Hinblick auf die steigenden technischen Anforderungen sicher gerechtfertigt.

Nachtrag

10. Zum Vergleich der exakten und der approximativen Lösung des Erwärmungsverlaufs für den Stab Bild 2

Ermitteln wir die exakte mittlere Enderwärmung des Stabes Bild 2 (siehe KESSLER [12]), erhalten wir

$$\vartheta = \frac{1}{l} \int_0^l T(x) dx = \frac{w l^2}{\lambda A_2^3} [A_2 - \operatorname{tgh} A_2]; \quad A_2^2 = \frac{U H}{F \lambda} \cdot l^2.$$

Für $A_2 < \pi/2$ entwickeln wir $\operatorname{tgh} A_2$ nach den Potenzen von A_2 und erhalten nach der Addition von A_2 und Division durch A_2^3

$$\vartheta = w l F \cdot \frac{l}{3 \lambda F} \left[1 - \frac{6}{5} \left(\frac{l}{3 \lambda F} \cdot \frac{U H l}{1} \right) + \frac{153}{105} \left(\frac{l}{3 \lambda F} \cdot \frac{U H l}{1} \right)^2 - + \dots \right].$$

Setzen wir für $r_{in} = l/3 \lambda F$ und als Wärmeübergangswiderstand $r_{\bar{u}} = 1/UH l$ (in Abschnitt 3 angeführte Werte) als Schätzungswerte ein und wenn wir die gesamten Wärmeverluste im Stab mit $W = w l F$ bezeichnen, erhalten wir, wenn wir noch den Ausdruck $r_{\bar{u}}/(r_{in} + r_{\bar{u}})$ vor die Klammer setzen

$$\vartheta = W \frac{r_{in} r_{\bar{u}}}{r_{in} + r_{\bar{u}}} \left[1 - 0,2 \left(\frac{r_{in}}{r_{\bar{u}}} \right) + 0,26 \left(\frac{r_{in}}{r_{\bar{u}}} \right)^2 - + \dots \right],$$

wohingegen wir nach den Regeln der Methode der äquivalenten Wärmequellenetze

$$\vartheta = \frac{W}{\left(\frac{1}{r_{in}} + \frac{1}{r_{\bar{u}}} \right)} = W \frac{r_{in} \cdot r_{\bar{u}}}{r_{in} + r_{\bar{u}}}$$

erhalten.

Die Summe vom zweiten Glied in der Klammer des exakten Ausdruckes an gibt also den Fehler an, den wir begehen, wenn wir die angeführten Werte von r_{in} und $r_{\bar{u}}$ anstatt der genauen Werte von r_{in} und $r_{\bar{u}}$ zur Berechnung benutzen. Man sieht, daß z. B. für $(r_{in}/r_{\bar{u}}) < 0,5$ der absolute Wert des Fehlers schon sehr gering ist.

Für den Erwärmungsverlauf lautet in dem gleichen Falle die Lösung von Gl. (5) (siehe KESSLER [12]) nach durchgeführter Mittelung

$$\begin{aligned} \vartheta(t) &= \frac{1}{l} \int_0^l T(x, t) dx = \frac{w l^2}{2 \lambda} \left\{ \frac{2}{A_2^3} [A_2 - \operatorname{tgh} A_2] \right. \\ &\quad \left. - 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin \delta_n}{\delta_n^2 (\delta_n^2 + A_2^2)} \cdot \exp [-F_0 (\delta_n^2 + A_2^2)] \right\}, \\ A_2^2 &= \frac{U H}{F \lambda} l^2; \quad F_0 = \frac{\lambda}{\rho c l^2} t \quad \text{und} \quad \delta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}. \end{aligned}$$

Für den zweiten Ausdruck entwickeln wir den Bruch $\frac{1}{\delta_n^2 (\delta_n^2 + A_2^2)}$ in eine Reihe. Wir erhalten so nach Einführung von $W, r_{in}, r_{\bar{u}}$ und $(mc) = \rho \cdot F \cdot l \cdot c$ außer dem schon angeführten Ausdruck

$$\begin{aligned} &- w l F \frac{l}{3 \lambda F} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sin \delta_n \cdot 6 \cdot \left[\frac{1}{\delta_n^4} - \frac{3}{\delta_n^6} \left(\frac{l}{3 \lambda F} \cdot \frac{U l H}{1} \right) + \frac{9}{\delta_n^8} \left(\frac{l}{3 \lambda F} \cdot \frac{U l H}{1} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{27}{\delta_n^{10}} \left(\frac{l}{3 \lambda F} \cdot \frac{U l H}{1} \right)^3 + \dots \right] \cdot \exp \left[\frac{1}{\rho l F c} \left\{ \frac{3 \lambda F}{l} \cdot \frac{\delta_n^2}{3} + \frac{U l H}{1} \right\} t \right] = \\ &= W \cdot r_{in} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{6}{\delta_n^4} - \frac{18}{\delta_n^6} \left(\frac{r_{in}}{r_{\bar{u}}} \right) + \frac{54}{\delta_n^8} \left(\frac{r_{in}}{r_{\bar{u}}} \right)^2 - \frac{162}{\delta_n^{10}} \left(\frac{r_{in}}{r_{\bar{u}}} \right)^3 + \dots \right\} \cdot \exp \left\{ \frac{1}{(mc)} \left(\frac{1}{r_{in}} \frac{\delta_n^2}{3} + \frac{1}{r_{\bar{u}}} \right) t \right\} \end{aligned}$$

oder wenn wir noch den Ausdruck $r_{\bar{u}}/(r_{in} + r_{\bar{u}})$ vor die Klammer setzen und $n = 0, 1, 2, \dots n$ einsetzen

$$\begin{aligned} &W \frac{r_{in} r_{\bar{u}}}{r_{in} + r_{\bar{u}}} \left\{ \left[0,985 - 0,21 \left(\frac{r_{in}}{r_{\bar{u}}} \right) + 0,27 \left(\frac{r_{in}}{r_{\bar{u}}} \right)^2 - + \dots \right] \cdot e^{-\frac{1}{(mc)} \left[0,825 \frac{1}{r_{in}} + \frac{1}{r_{\bar{u}}} \right] t} \right. \\ &\quad + \left[1,21 \cdot 10^{-2} + 2,97 \cdot 10^{-3} \left(\frac{r_{in}}{r_{\bar{u}}} \right) - 8,91 \cdot 10^{-3} \left(\frac{r_{in}}{r_{\bar{u}}} \right)^2 + \dots \right] \cdot e^{-\frac{1}{(mc)} \left[7,4 \frac{1}{r_{in}} + \frac{1}{r_{\bar{u}}} \right] t} \\ &\quad \left. + \left[1,59 \cdot 10^{-3} + 1,59 \cdot 10^{-3} \left(\frac{r_{in}}{r_{\bar{u}}} \right) - 7,40 \cdot 10^{-5} \left(\frac{r_{in}}{r_{\bar{u}}} \right)^2 + \dots \right] \cdot e^{-\frac{1}{(mc)} \left[20,8 \frac{1}{r_{in}} + \frac{1}{r_{\bar{u}}} \right] t} + \dots \right\} \end{aligned}$$

usf.

Es ist augenscheinlich, daß es nicht mehr, wie im stationären Fall, möglich wäre, durch Einsetzen von richtigen Werten für r_{in} und $r_{\bar{u}}$ die Reihen in den eckigen Klammern zu liquidieren und daß die Reihe nach t ebenfalls bestehen bliebe. Es ist jedoch der absolute Wert des

zweiten und der weiteren Glieder der Reihe gering, und es schwindet auch der Einfluß der zweiten und der folgenden Zeitkonstanten praktisch schon nach kurzer Zeit nach Beginn der Anwärmung.

Die Lösung mittels der Methode der äquivalenten Wärmequellennetze ergibt

$$\vartheta(t) = W \frac{r_{in} r_{\dot{u}}}{r_{in} + r_{\dot{u}}} \left\{ 1 - e^{-\frac{1}{(mc) \left(\frac{1}{r_{in}} + \frac{1}{r_{\dot{u}}} \right)} t} \right\}.$$

Der Verlauf der exakten Lösung für $r_{in} = 0,07^\circ \text{C/W}$, $r_{\dot{u}} = 0,20^\circ \text{C/W}$, $W = 800 \text{ W}$ und $(mc) = 3,10^4 \text{ kWsek}/^\circ \text{C}$ ist in Zahlentafel 3 enthalten. Gleichzeitig ist der jeweilige Fehler der angenäherten Lösung angegeben, sowie der Anteil, der durch den 4%igen Fehler der Approximation der Widerstände in bezug auf die Enderwärmung entsteht.

Zahlentafel 3.

t (min)	0	2	5	10	20	40	80	120	∞
Erwärmungsverlauf exakt ($^\circ \text{C}$)	0	1,86	5,94	11,15	19,1	28,7	36,3	38,4	39,1
Gesamtfehler ($^\circ \text{C}$) der äquivalenten Lösung	0	0,96	0,96	1,45	2,2	2,8	2,83	2,5	1,6
Der von der Approximation von r_{in} und $r_{\dot{u}}$ herrührende Fehler		0,17	0,39	0,80	1,2	1,4	1,4	1,5	1,6

} $\sim 4\%$

11. Lösung des Erwärmungsproblems mit Hilfe von Modellen und automatischen Rechengegeräten

Um erstens bei der Wahl des Netzbildes nicht aus Gründen übermäßiger Rechenarbeit eingeschränkt zu sein oder auch um einfach die Rechenarbeit auf ein Minimum herabzudrücken, ist es natürlich wichtig, sich bei praktischer Anwendung angemessener Hilfsmittel zu bedienen. Wir wollen darum hier einige Anmerkungen zu dieser Frage, der natürlich eine selbständige Arbeit gewidmet werden sollte, beifügen. Numerische Rechenmethoden, die ebenfalls als Hilfsmittel dienen können und die auch beim Matrizenkalkül in Frage kommen, sind allgemein bekannt und wir wollen uns daher mit ihnen nicht näher befassen.

Zur Berechnung der Enderwärmung kann mit Vorteil ein Gleichstromnetz benutzt werden, das ohne besondere Schwierigkeiten realisierbar ist. Dabei ist beim Entwurf eines solchen nicht einmal nötig, z. B. die Temperaturabhängigkeit der Wärmeentwicklung in den, das Kupfer darstellenden Wärmequellen oder die Abhängigkeit der Kühllufttemperatur ϑ_{κ} von der in die Kühlluft abgegebenen Wärmemenge usw. durch kostspielige elektronische Hilfsmittel zu modellieren. Wie leicht zu zeigen ist, können die Werte von W_v und ϑ_{κ} an Hand der ersten Annäherungswerte für ϑ_v , $v = 1, 2, \dots$ durch das Modell, nach und nach festgelegt werden. Die erste Annäherung von ϑ_v erhalten wir, wenn wir statt den Unbekannten W_v zunächst W_{0v} und schätzungsweise für ϑ_{κ} einsetzen usw. Dabei genügt meist schon die erste Korrektur. Von der Güte der Ergebnisse kann man sich durch Berechnung der Wärmebilanz für die einzelnen Netzknotenpunkte überzeugen.

Man kann natürlich auch für die Berechnung eine beliebige, zur Lösung simultaner Gleichungssysteme entworfene Maschine benutzen, was aber gewisse Nachteile mit sich bringt. Der Vorteil des Modellierens des Netzes besteht darin, daß jedes Netzelement direkt einem Widerstand, den Verlusten in der Wärmequelle usw. entspricht. Es sind darum die am Netz durchgeführten Operationen anschaulich. Man kann z. B. ohne große Mühe die Parameter des Netzes so ändern — was technisch sehr wichtig ist — daß man für gewisse gegebene Elemente und Temperaturen leicht die ihnen entsprechenden Werte der restlichen Parameter quasi versuchsweise findet u. a. m. Einen gewissen Nachteil bilden allerdings die oben erwähnten Korrekturen, wenn man mit einem ganz einfachen Netzmodell ohne selbständige Korrekturen für α und ϑ_{κ} arbeitet. Bei einer Maschine, die für die Lösung von Simultangleichungen entworfen ist, entfällt zwar die Berechnung von Korrekturen, bei der praktischen Arbeit wird sich aber der Mangel an Anschaulichkeit unliebsam bemerkbar machen. Auch ist es, sollen

beispielsweise mehrere Alternativen gerechnet werden, nötig, immer vom Neuen die Werte der Koeffizienten der Gleichungen zu berechnen, da z. B. die Hauptdiagonalkoeffizienten des Systems von dem Wert aller Widerstände der betreffenden Zeile abhängen usw. Sollen z. B. zu einer gegebenen Lösung die Parameter des Problems gesucht werden, stößt man so auf große Schwierigkeiten.

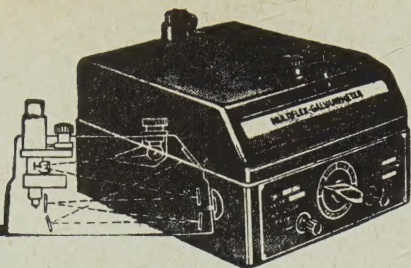
Bei der Berechnung des Erwärmungsverlaufs sind ebenfalls zwei Wege gangbar, bei den gleichen Vor- und Nachteilen, wie sie eben erwähnt wurden. So wurde die Lösung Abb. 7 mittels eines Analog-Rechengerätes ermittelt. Es sei bemerkt, daß man, hat die zur Verfügung stehende Maschine nicht genügend Elemente für die Berechnung der Form des simultanen Gleichungssystems Gl. (4), diese Gleichung in eine Gleichung höheren Grades umformen kann, wodurch man evtl. mit weniger Verstärkern usw. auskommt. Will man z. B. den Temperaturverlauf bei intermittierendem Betrieb ermitteln, so muß man zwei Gleichungssysteme — Anwärmung und Abkühlung — in der Maschine haben, so daß man durch Einsetzen der im vorhergehenden Halbzyklus ermittelten Enderwärmung den nächsten Halbzyklus ermitteln kann.

Andererseits zeigte es sich aber praktisch als unmöglich, durch Variation der in der Maschine eingesetzten Koeffizienten die Werte der Parameter des Problems, einem gemessenen Verlauf entsprechend, zu bestimmen. Es scheint, daß dies bei einem eigentlichen Model eher möglich wäre.

Literatur

- [1] HAK, J.: Möglichkeiten und Aussichten einer unbeschränkten Lösung des Wärmeproblems von elektrischen Maschinen. E u. M Bd. 74 (1957) S. 305. — [2] FABINGER: Das Erwärmungsproblem eines Systems dreier Körper. (tschechisch) Elektrotechnický Obzor (1927) S. 329, 383, 400. — [3] BACH: Über die Erwärmung des N-Körper-Systems. Arch. f. Elektrotechn. Bd. 27 (1933) S. 7. — [4] LIGHTBAND: Temperature Rise of Ventilated Railway-motor Armature. Trans. AIEE (1932) S. 502. — KÜHLOW: Thermische Ausgleichsvorgänge bei Bahnmotoren. ETZ-A Bd. 75 (1954) S. 661. — [5] HAK, J.: Lösung eines Wärmequellennetzes mit Berücksichtigung der Kühlluftströme. Arch. f. Elektrotechn. Bd. 42 (1955) S. 137. — HAK, J.: Der Luftspaltwärmewiderstand einer elektrischen Maschine. Arch. f. Elektrotechn. Bd. 42 (1956) S. 257. — HAK, J.: Die inneren axialen Wärmewiderstände einer elektrischen Maschine. Arch. f. Elektrotechn. Bd. 43 (1957) S. 58. — [6] HAK, J.: Lameraner, List, Technik der elektrischen Rotationsmaschinen (tschechisch). Technický průvodce 12, Elektrické stroje I (Tschechisches Handbuch) S. 65, 497. Prag 1953. — [7] KESSLER: Eine allgemeine Lösung der Berechnung des Erwärmungsvorganges elektrischer Maschinen. Acta Technica Bd. 1 (1956) S. 288. — [8] KESSLER: Berechnung des Erwärmungsvorganges elektrischer Maschinen. Acta Technica Bd. 4 (1959) S. 1. — [9] SODERBERG: Steady Flow of Heat in Large Turbine-Generators. Trans. AIEE Bd. 50 (1931) S. 782. — [10] SNELL: Loading of Hydrogen Cooled Generators at Elevated Gas Pressure. Trans. AIEE Bd. 69 (1950) S. 160. — PEAK: Heat Flow in Turbine Generator Rotors. El. Engng. Bd. 53 (1934) S. 135. — KOTNIK: An Equivalent Thermal Circuit for Nonventilated Induction Motors. Trans. AIEE-Part III (1955) S. 1604. — KESSLER: Berechnung der Läufererwärmung von Turbogeneratoren mittels der Methode der äquivalenten Wärmequellennetze. Arch. f. Elektrotechn. Bd. 43 (1957) S. 133. — u. a. m. [11] SCHAIT: Beitrag zu den Erwärmungs- und Kühlungsproblemen elektrischer Maschinen. Arch. f. Elektrotechn. Bd. 22 (1929) S. 375. — HARMS: Die Wärme flüsse in Rotoren und Turbogeneratoren. Arch. f. Elektrotechn. Bd. 27 (1933) S. 1. — Temperaturverteilung und Wärmeströmung eines homogenen gebetteten Leiters mit zwei verschiedenen Wärmedurchgangszahlen. Arch. f. Elektrotechn. Bd. 33 (1939) S. 131. — MOLDENHAUER: Läufererwärmung von Turbogeneratoren. Arch. f. Elektrotechn. Bd. 35 (1941) S. 595. u. a. m. — [12] BUCHHOLZ: Die Lösung von Aufgaben über die Erwärmung fester Körper durch innere Wärmequellen bei eindimensionalem Wärmestrom mittels der komplexen Integration. Arch. f. Elektrotechn. Bd. 28 (1934) S. 75. — KESSLER: Der Erwärmungsvorgang in Platten und Stäben endlicher Länge mit innerer Wärmeentwicklung bei eindimensionaler Wärmeströmung (tschechisch). Aplikace matematiky 3 (1958) S. 190. — [13] ALGER, KILLBOURNE u. SNELL: Turbine-Generator-Winding Temperatures at Various Hydrogen Pressures. Trans. AIEE-Part III (1955) S. 232. — WILLYOUNG: Gap-Pickup Conductor Cooling of Turbine-Generator Fields. Trans. AIEE-Part III (1956) S. 260. — [14] PROVAZNÍK: Elektrische Modelle des nichtstationären Wärmezustandes elektrischer Maschinen (tschechisch). Elektrotechnický Obzor (1957) S. 277. — Elektrische Modelle der nichtstationären Wärmeströmung in elektrischen Maschinen (tschechisch). Elektrotechnický Obzor (1958) S. 184.

Dr. A. KESSLER, SAV Bratislava, ČSR



Multiflex - Galvanometer

Empfindlich wie ein Spiegelgalvanometer — ab $5 \cdot 10^{-11} \text{ A}$ —. Einfach im Gebrauch wie ein Zeigerinstrument. Verschiedene Systeme von 20-6000 Ohm. Austauschbare Lichtzeigerskalen mit parallaxenfreier Ablesung. Skalenbeleuchtung umschaltbar für Netz- und Batterieanschluß. **Zusatzgeräte:** Photographische Registriereinrichtung. Photoelektrischer Nachlaufsreiber. Photoelektrische Schaltkontakte.

Verlangen Sie unsere neue Liste 18/AE



DR. BRUNO LANGE

Spezialfabrik lichtelektr. Zellen
und Apparate

BERLIN-ZEHLENDORF

Hermannstraße 14-18

Electric Contacts Handbook

by RAGNAR HOLM, Ph. D., aided by
ELSE HOLM, Ph. D., both of St. Marys (Pa.)
Third completely rewritten edition of „Die
technische Physik der elektrischen Kontakte“
by R. Holm

Mit 194 Abb., XVIII, 522 Seiten Gr.-8°. 1958
In englischer Sprache. Ganzleinen DM 52,50

AUS DEN BESPRECHUNGEN

„...Aufbauend auf eigenem Erfahrungsmaterial aus mehr als vier Jahrzehnten hat R. Holm — mit Frau E. Holm — das heutige Wissen wohl erschöpfend dargestellt, und zwar in einer Weise, wie es eben nur der kann, der sich das Gebiet selbst erarbeiten mußte. Sorgfältige Behandlung der bestimmten Werkstoffeigenschaften und vieler physikalischer und chemischer Vorgänge sind erforderlich, das Verständnis für die Vorgänge an den Kontakten zu schaffen; anscheinend längst verstandene Begriffe, wie Härte, Reibung und Verschleiß, erscheinen dabei unter einem neuen Licht...“

VDI-Zeitschrift

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GOTTINGEN · HEIDELBERG



INTERMETALL

Silizium- und Germanium-
HALBLEITER

Bauelemente

Wir fertigen in unserem Freiburger
Werk für die verschiedensten Anwen-
dungen der modernen Elektronik:

Silizium-Transistoren

Silizium-Dioden

Silizium-Zenerdioden

Silizium-Leistungs-Gleichrichter

Germanium-Transistoren

Germanium-Flächendioden

INTERMETALL

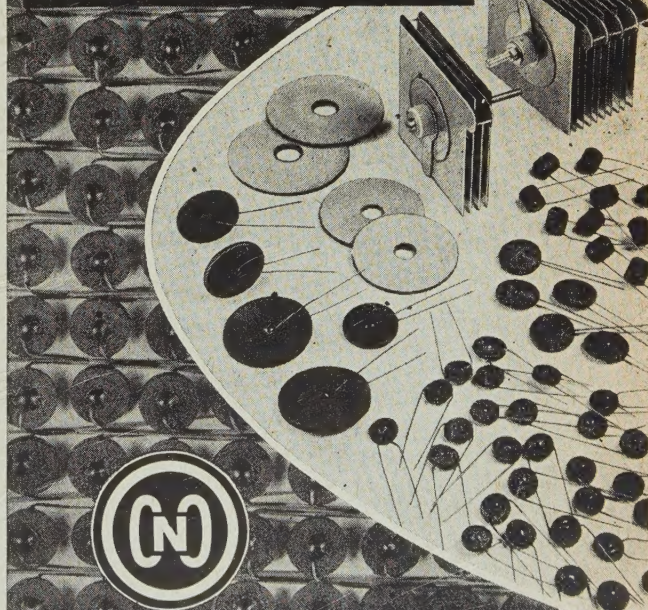
Gesellschaft für Metallurgie
und Elektronik m. b. H.

Freiburg/Brsg., Hans-Bunte-Str. 19



VDR-OCELIT-VARISTOREN

spannungsabhängige Widerstände
für Funkenlöschung und
Funkentstörung (UKW+Fernsehbereich)



C. CONRADTY NÜRNBERG

Elektroden, elektrische und galvanische Kohlen

Der lichtelektrische Effekt und seine Anwendungen

Unter Mitwirkung von Dr. K. W. BÖER, Berlin, Dr. F. ECKART, Berlin, Reg.-Rat Dr. W. LEO,
Braunschweig,

bearbeitet und herausgegeben von Dr. H. SIMON, Professor an der Humboldt-Universität und stellv.
Direktor des Instituts für Festkörperforschung der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin,
und Dr. R. SUHRMANN, o. Professor und Direktor des Instituts für physikalische Chemie und Elektro-
chemie der Technischen Hochschule Hannover

Zweite, vollkommen neubearbeitete Auflage des Buches „Lichtelektrische Zellen und ihre Anwendung“

Mit 599 Abbildungen. XII, 747 Seiten Gr.-8°. 1958. Ganzleinen DM 97,50

AUS DEN BESPRECHUNGEN

„Die vor 25 Jahren erschienene erste Auflage trug den Titel „Lichtelektrische Zellen und ihre Anwendungen“. Inzwischen hat die Forschung eine Fülle neuer Erkenntnisse gebracht, so daß die nun vorliegende Übersicht über den heutigen Stand einem dringenden Bedürfnis entgegenkommt. Die Änderung des Titels soll zum Ausdruck bringen, daß das Buch in seiner zweiten, völlig neubearbeiteten Auflage weit über Photozellen im engeren Sinn hinausgreift. Auf dem Gebiet des äußeren Photoeffekts beruhen die in den vergangenen Jahren erzielten Fortschritte auf der Anwendung „zusammengesetzter“ Photokathoden und der Legierungskathoden sowie auf der Verstärkung photoelektrischer Ströme durch hochemittierende Sekundärelektronen-Kathoden. In Belichtungsmessern hat das Selen-Sperrschicht-Photoelement, das sich trotz vieler Neuschöpfungen auf dem Halbleitergebiet als unschlagbar erwiesen hat, weiteste Verbreitung gefunden. Während also hier ein gewisser Abschluß erreicht zu sein scheint, ist auf dem Gebiet des inneren Photoeffekts die Entwicklung noch in vollem Fluß. In den entsprechenden Abschnitten wird deshalb weniger Vollständigkeit als eine Übersicht über die Grundlagen angestrebt. Dazu werden die erforderlichen Erkenntnisse der Festkörperphysik in erfreulich klarer Weise dargeboten.

Bei der Fülle des aufzunehmenden Stoffes war es ein glücklicher Gedanke der Herausgeber, zur Abfassung einiger spezieller Abschnitte weitere Spezialisten (K. W. BÖER, F. ECKART, W. LEO) heranzuziehen. Das Buch bringt in wohlabgewogener Weise Grundlagen und Anwendungen. Wieweit das von den Anwendungen umfaßte Feld sich ausdehnt, kann nur durch einige wahllos herausgegriffene Stichworte angedeutet werden: Sekundärelektronenvervielfacher und Szintillationszähler, Photowiderstände, Halbleiterbildwandler, Röntgenbildverstärker, Dosimeter, Ikonoskop und Vidicon. Natürlich wird auch auf die Verwendung von Photoelementen zur Umwandlung von Sonnenstrahlung in elektrische Energie eingegangen. Der praktisch erreichbare Wirkungsgrad beträgt bei Siliziumzellen 11%.

Das ganz dem neuesten Stand entsprechende Buch stellt eine wahre Fundgrube dar und kann daher wärmstens empfohlen werden. Aber nicht nur der reiche Inhalt ist hervorzuheben, sondern in gleicher Weise auch die Präzision der Darstellung.

Zeitschrift für angewandte Physik

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG